前　言

彼得曼遺稿編輯部成立的起因和目的已在第一册前言中說明，現在这一本是該部編輯的最后一册．总計有“高級超越函数”三册及“積分变换表”二册．本册所收計有：自守函数，拉美与馬蒂安函数，球体与橢球体波函数，数論函数等各章；另有一章專門敍述母函数．这一册是在彼得曼遺稿編輯部离开 Pasadena 之后編寫的，但麥格紐斯教授在其参加紐約大学工作之后，仍担任了本册第 14, 17, 19 各章的撰寫工作．

第十四章所收的是一些能直接構作的自守函数．这一章中介紹的一般定理，其主要目的是为所举例子作說明，至于这一科目的代数及数論方面的深入研究，已不在本書范圍之內．在拉美函数一章中，我們節略了拉美多項式的討論（在一些較易見的書籍中均有適当敍述），而着重于周期拉美函数及拉美-黃格林函数的最新理論的探討．本書关于馬蒂安函数敍述得較多，其取材以 Mc-Lachlan 的著作为主要的根据，該書是这一方面的标准著作．另外，由 Meixner 及 Schäfke 編寫的有关馬蒂安函数一書現在正在付梓，不久当可問世．馬蒂安函数方面現在主要有二种对等的記法，本書所采用的是英美及欧洲大陸上大部地区通用的一种記法，不过，这一函数的很多数值表却用另一种記法．在球体波函数方面，我們節删了很多早期的文献（由于在別的書上容易找到），而就 Bouwkamp, Meixner 等在最近 15 年內所得的結果作了一个总結．Meixner 及 Schäfke 即將出版的著作中也有这方面的題材．橢球波函数的敍述較为簡略，在一定程度上反映了这一科目目前还不夠充实．数論函数一章的目的是介紹某些算術函数的若干較重要性質，其詳細研究也不屬于本書范圍．承 Apostol 教授審閱

了这一章,并供給了 17-11 節. 我們对目前所知尚不多的一些特殊函数也專闢了几節,作了簡略的介紹,这些函数还是最近几年來一些論文所致力研究的. 最后一章母函数,收集了很多材料,这是彼得曼教授遺下的規划之一. 他所遺下的其他材料包括有定义特殊函数的微分方程、冪級数、n 階導数公式等的表,引为遺憾的是我們在編輯过程中决定把这些材料都節略了,沒有收入本書之中. 本册第 14, 17 两章的編纂都是試驗性質的,我們希望,它应能給讀者以一定的帮助.

像在前一册中一样,每章之末都附有大量的參考文献,所列当然無法完备,但对所論函数來說,这些文献已夠作介紹,并可帮助讀者找到其它材料. 各不同函数的有关書目則參引在正文之中.

卷末有索引及記法表. 前二册中所用的一些記法在本册中仍將提到,但較一般的則不再重复說明. 參考方法仍与上二册相同. 文內,文献的參引先列作者名字, 后列發表年分; 其全貌則列于章末. 同一節內的方程只記一数,其他節內的方程用二个数标誌,前一数为章節,后一数指方程. 章次从第一册連貫記数, 1 至 6 章在第一册, 7 至 13 章在第二册, 14 至 19 章在本册. 例如, 3-7(27) 是指第 3 章第 7 節的方程 (27), 在第一册中; 15-3(2) 是第 15 章第 3 節的方程 (2), 在本册之中.

A. 爱尔台里

目 錄

第十四章　自守函数

这一章所引述的是自守函数、特别是模函数的許多基礎定义和一些比較容易遇見的例子．这一科目的許多分門，包括羣論，几何的不同分枝，数論以及复变数函数論的許多重要方面都不予討論．Felix Klein 的基本概念，Fricke 的艰苦研究成果，最近 Hecke 及 C. L. Siegel 的發現，以及它們的結果与数論的联系等等則也沒有提到，关于 Poincaré 的 θ 級数的簡略介紹也是很不完全的．

本章末尾列有參考目錄．整个本章中最重要的參考書籍为：Fricke (1901–1921), Fricke & Klein (1897, 1912). Fubini (1908), Giraud (1920), Schlesinger (1924), Ford (1929)．关于数論方面可參看 Reid (1910)，代数方面參看 Van der Waerden (1949)．

各別几節的特殊參考書如下：

14–1–4	Ford (1929)
14–3	Klein (1884)
14–4	Krazer & Wirtinger (1901–1921)
14–6	Klein & Fricke (1890, 1892)
14–6–4	Fricke (1916, 1922).

其余的參考文献根据需要另行提出．

14–1. 間斷羣和对应变換

14–1–1. 对应变換

設 z 为一复变数，它或者代表廣义复数平面(包括有無窮远点)上的一点 $z=x+iy$，或者代表三維空間球面

(1)　$x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$

上的一点 (x_1, x_2, x_3)；这一球面称为黎曼球面，記为 S_0. 复数平面

上的点与黎曼球面上的点之間的对应关系由下面的方程所确定:

(2) $x=\frac{x_1}{1+x_3},\ y=\frac{x_2}{1+x_3},\ z=x+iy$

(3) $x_1=\frac{2x}{1+x^2+y^2},\ x_2=\frac{2y}{1+x^2+y^2},\ x_3=\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}.$

S_0 在 z 平面上的映像是保形的,称为球極平面射影. 球面上的圓映成平面上的圓或直綫. 在这一章里,我們將把直綫作为圓的特殊情形(通过 $z=\infty$ 的圓),因此,我們說的圓是指圓或直綫,我們說的圓弧是指圓的一段或直綫的一段. 如果一直綫段包括有無窮远点,那么它在欧氏平面上的表象將包括二个分量;此外,复数平面上的綫段是一連通集(二分量在無窮远处連結).

設 a, b, c, d 为任意的复数,满足条件

(4) $ad-bc=1.$

則关系式

(5) $z'=\frac{az+b}{cz+d}=\sigma(z)$

是 z 平面或 S_0 球面映成自身的一种映射,称为对应变換(或代換) σ. 在这一說明中,我們把 z' 作为复数平面上的另外一点. 另外还有一种解釋是把 z' 作为同一点的一个新变数或新坐标,但在这一章里,我們一般应用前一个解釋. 如 $ad-bc\neq 0$, 則映射 (5) 是非退化的,而由于 (5) 是 a, b, c, d 的齐次式,故总可以使 (4) 式的条件成立. 因此, (4), (5) 二式定义了一个最普遍的非退化映射,其形式如(5). [对于一个退化的映射 (5), $ad-bc=0$, 映像变为不定或为一簡單的点.] z 与 z' 之間的关系是一对一的.从(4)及(5)可得

(6) $z=\frac{dz'-b}{-cz'+a}.$

設 σ' 为第二个对应代換,

(7) $\sigma'(z)=\frac{a'z+b'}{c'z+d'},\ a'd'-b'c'=1.$

則

$$\sigma'[\sigma(z)]=\frac{(a'a+b'c)z+a'b+b'd}{(c'a+d'c)z+c'b+d'd} \tag{8}$$

也是一个对应代換，因为

$$(a'a+b'c)(c'b+d'd)-(a'b+b'd)(c'a+d'c)$$
$$=(ad-bc)(a'd'-b'c')=1.$$

代換(8)称为代換 σ' 与 σ（依这一次序）的积，并記为 $\sigma'\sigma$. 任何有限数的代换的積可同样定义. 一般說來，$\sigma'\sigma$ 与 $\sigma\sigma'$ 是不同的. σ 的反演是对应变換

$$z'=\frac{dz-b}{-cz+a}=\sigma^{-1}(z),\ ad-bc=1, \tag{9}$$

并記为 σ^{-1}. 如 I 为恆等代換，$I(z)=z$，則顯然有

$$\sigma\sigma^{-1}=\sigma^{-1}\sigma=I$$

或

$$\sigma[\sigma^{-1}(z)]=\sigma^{-1}[\sigma(z)]=z.$$

任一对应代換將 S_0 上的任一圓映成圓，反之，將圓映成圓的任一連續的一对一的 S_0 映成自身的映射是一对应变換.

14-1-2. 不变点. 变換的分类

如果 $\sigma(\zeta)=\zeta$，則点 ζ 称为变換 $\sigma(z)$ 的不变点. 如 $c\neq0$，則(5)式的变換 σ 的不变点为

$$\zeta_1=\frac{1}{2c}\{a-d+[(a+d)^2-4]^{1/2}\}$$

$$\zeta_2=\frac{1}{2c}\{a-d-[(a+d)^2-4]^{1/2}\};$$

如 $c=0$ 而 $a\neq d$，則不变点为

$$\zeta_1=b/(d-a),\quad \zeta_2=\infty.$$

如 $c=0$ 而 $a=d$，則二个不变点重合于無窮远，如再有 $b=0$，則每一点都是不变点. 在寫出一般情况下 ζ_1 及 ζ_2 的公式的时候，我

們用到公式(4).

对应变换根据不变点的不同可以分成下面几种:

(i) 恒等变换. 每一点都是不变点

$$a=d=\pm 1,\quad b=c=0.$$

(ii) 抛物变换. 二个不变点重合

$$a+d=\pm 2,\quad \zeta_1=\zeta_2=\zeta.$$

代换可寫成如下二种形式之一

$$\frac{1}{z'-\zeta}=\frac{1}{z-\zeta}+\delta \qquad \zeta\neq\infty$$

$$z'=z+\delta \qquad \zeta=0.$$

在第一种情况下

$$(a+d)^2=4,\ \zeta=\frac{a-d}{2c},\ \delta=\pm c\neq 0,$$

在第二种情况下,

$$a=d=\pm 1,\ c=0,\ \delta=b/d\neq 0.$$

(iii) 具有两个不同的不变点 ζ_1 及 ζ_2 的代换. 这样的代换可寫成如下形式之一

$$\frac{z'-\zeta_1}{z'-\zeta_2}=\lambda\frac{z-\zeta_1}{z-\zeta_2} \qquad \zeta_1,\zeta_2\neq\infty$$

$$z'-\zeta_1=\lambda(z-\zeta_1) \qquad \zeta_1\neq\infty,\ \zeta_2=\infty,$$

其中

$$\lambda^{1/2}=\frac{1}{2}\{(a+d)-[(a+d)^2-4]^{1/2}\},\ 如\ c\neq 0,$$

$$\lambda=a \qquad 如\ c=0.$$

这里又分三种可能情形,

(iii a) $|\lambda|=1$ 椭圓代换

(iii b) λ 是实数 双曲代换

(iii c) λ 不是实数, 但 $|\lambda|\neq 1$, 斜駛代换

对于任一对应代换 τ 來說，代换 σ 和 $\tau^{-1}\sigma\tau$ 称为相似代换．凡是相似代换都屬于同一类型，也就是說，都是橢圓的，或都是抛物的等等．

14-1-3. 間断羣

对应代换 $\sigma, \sigma' \cdots$ 的一个集合 G 称为一个羣，如果它們具有如下的性質：

(i) 恆等变换 I 包含于 G.

(ii) 如果 σ 包含于 G，則 σ^{-1} 也包含于 G.

(iii) 如果 σ 及 σ' 包含于 G，則 $\sigma\sigma'$ 也包含于 G.

如果 G 中的任一代换是有限数目的 σ_i 的正次冪或負次冪的相乘積，那么代换 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots$ 就称为是 G 的生成元

二个点 P 及 P'(S_0 上的或复数平面上的)，如果$P \neq P'$，則称为是关于 G 等价的或相合的，G 中必有一个代换可將 P 映成 P'.

設 D_0 为 S_0 上或复数平面上的一个固定的开区域(＝点的开連通集)，并設 G 为一对应代换羣，其中每一个代换都將 D_0 映成自身．G 中的某些代换可有不变点在 D_0 中．現在讓我們把 G 的某些代换(不是 I)的所有一切不变点或所有一切不变点的極限点都从 D_0 中移出；假設移出这些点以后剩下來的集 D_1 (是开集)是連通的，因而是一个区域．对于 D_1 中的任一点 P_1，考察一个由所有关于 G 等价于 P_1 的点組成的集合．如果 P_1 不是等价于 P_1 的点集的一个極限点，也就是說，如果所有等价于 P_1 的点都在 P_1 的某一鄰域的外部，且如 D_1 的所有点都如此，則称 G 为区域 D_0 上的一个間断羣．一个实代换羣的間断性的判別的簡單証明見 Siegel (1950).

14-1-4. 基本区域

現在我們來考察对应代换的一个羣 G，与它相連帶的可以是

一个閉区域(=閉連通集) F^*, 具有如下的性質: (i) F^* 以有限数目的圓或圓弧(可以有同一圓的几段不相連的弧段)为界,設这些圓或圓弧以 $A_1, A_2, \cdots A_n$ 表示;二弧相交的一点称之为**頂点**,把所有的頂点記为 $V_1, V_2, \cdots, V_m$. (ii) F^* 的任二内点都关于 G 不等价. (iii)边界的組成部分 $A_1, A_2, \cdots A_n$ 可排列成对 $A_\nu, A_{\nu'}, \nu \neq \nu'$, 使得对于每一个 ν, 在 G 中恰巧存在一个 σ_ν^*, 可將 A_ν 映成 $A_{\nu'}$. (iv) 上面 (iii) 中的代换 σ_ν^* 是 G 的**生成元**,也就是說 G 的每一代换都是 σ_ν^* 的冪(正的或負的)的相乘積.

現在我們先來說明 G (不是 I) 中沒有一个代换的不变点是在 F^* 的内部. 如果 P (在 F^* 的内部)是 G 中的 σ 的一个不变点,則 σ 將把 P 的一个鄰域映成 P 的某一鄰域,这二鄰域都可以假設是在 F^* 的内部,但这与 (ii) 矛盾. 現在考察在 G 的所有代换下 F^* 的映像. 所有这些映像的併集組成一个区域[这一併集就是根据 (iii) 及 (iv) 所成的一个連通集]. 沒有一个点可以重复二次为 F^* 内点的映像,因为如果对于二个内点 P 及 P', 假設有 $\sigma(P)=\sigma'(P')$, 則 $P'=\sigma'^{-1}[\sigma(P)]$, $\sigma'^{-1}\sigma$ 將包含于 G, 如果 $P\neq P'$, 則与 (ii) 矛盾,如果 $P=P'$, 則与上面所說的沒有不变点矛盾. 另一方面,作为 F^* 边界点的映像的点一定出現好几次,例如 $\sigma_\nu^* P_\nu = I P_{\nu'}$, 此处 P_ν 是 A_ν 上的一点,而 $P_{\nu'}$ 是 $A_{\nu'}$ 上的对应点. 移去 F^* 的一部分边界后就可以作成一个区域 F, 这一区域旣不是开区域也不是閉区域,它在 G 的代换下的映像將复盖 S_0 或复数平面的一个区域,而無重复部分. 区域 F 就称为 G 的**基本区域**.

要作出 F, 可將 F^* 的边界圓及边界弧(开的) 像上面所說的一样排列成对, A_ν, A'_ν; 从每一对中移去一段弧,留下另一个. 再將 F^* 的無窮数个映像相交的那些頂点棄去,而將余下的一些頂点按等价頂点分类,在每一分类中留下一点而棄去所有其他的点. 所有余下的点的集合(包括 F^* 的所有内点)就是 G 的基本域 F;

它包含的点之中沒有二点是等价的.

設 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots$ 为 G 的代換, σ_1 为恆等代換. 代換 σ_r 將 F 映成 F_r, 且 $F_1=F$. 所有 F_r 的併集組成一区域 D_1(一般它旣不是开的也不是閉的), D_1 的內部 D_0 是一开区域, 已在 14-1-3 節中討論过.

設 z 为 F 中的任一点, 令 $z_r=\sigma_r(z)$. 序列 $\{z_r\}$ 的一个極限点称为 G 的極限点(∞ 可以为極限点). 用 G 的任一代換可將所有極限点組成的集映成自身, 这可用以定义 D_0 或 D_1 的边界.

一个已知的羣 G 并不能确定一唯一的基本域 F, 可以証明(見 Fricke & Klein, 1897, 第 2 章 p. 128), 我們总可以选擇 F, 使得它的頂点中沒有一个是一双曲代換或一斜駛代換的不变点. 在 F^* 的一个橢圓頂点 V 上, 相交于 V 的二弧之間的夾角为 $2\pi/l$, 此处 l 为一正整数. 如 V 为 G 的橢圓代換 σ 的一不变点, 則 σ^l 是恆等代換; l 就称为 σ 或 V 的階. F^* 的一頂点如果是 G 的拋物代換的不变点, 則称为拋物尖点.

对应代換的二个羣 G 及 G', 称为是相似的或等价的, 如果存在一固定的代換 τ, 滿足条件 $G'=\tau^{-1}G\tau$, 也就是說, 对于 G 中的每一个 σ, 使得代換 $\sigma'=\tau^{-1}\sigma\tau$ 在 G' 上, 并使 G' 上的每一个 σ' 可以用这一方法从 G 中的代換 σ 求得. 如 F 为 G 的一个基本域, 則 $\tau^{-1}F=F'$ 是 G' 的一个基本域[$\tau^{-1}F$ 是 z 取值于 F 时所有点 $\tau^{-1}(z)$ 的集合].

基本区域的定义是無需作任何限制的, 这里所用是取其簡單; 更一般的討論可参看 Fricke & Klein (1897). 基本区域应由有限数的圓及圓弧圍成, 这一点并不是主要的, 主要的是: 基本域应是非等价点的完全集, 应是連通的, 应具有一合理的正規形狀. 这些条件之中, 前二个很容易公式化, 但第三个就很难用旣簡單又精确而又足夠普遍的形式來表达. 我們对 F 的頂点所下有限数的假設可給所論的自守函数加上某些限制, 这些限制可使某些一般性

的定理能有比較簡單的形式.

关于多变数自守函数基本区域的定义見 14-11, 14-12 節中所列的文献.

14-2. 自守函数的定义

設 G 为对应变换

(1) $z_r=\sigma_r(z)=\dfrac{a_rz+b_r}{c_rz+d_r}, \qquad a_rd_r-b_rc_r=1,\ r=0,1,2,\cdots$

的一个羣,其中 σ_0 是恆等变换,

$$a_0=d_0=\pm 1, \quad b_0=c_0=0.$$

設 G 在区域 D_0 上間断,并設 F 为 G 的一基本区域. 考察自守函数 $\phi(z)=\phi(z; G)$, 它满足如下的恆等关系

(2) $\phi(z_r)=\phi[\sigma_r(z)]=\phi(z) \qquad r=0,1,2,\cdots$

这些函数在一奇点 z_0 的鄰域中的性态可用一單值化变量 t 來說明,形式如下:

(3) $\phi(z)=t^m(a_0+a_1t+a_2t^2+\cdots)$,

其中 m 为一整数,对于 G 來說,單值化变量的定义如下.

如 z_0 不是 G 的一个代换的不变点,命

(4) $t=z-z_0 \qquad z_0\neq\infty$

(5) $t=z^{-1} \qquad z_0=\infty.$

如 z_0 是抛物代换

(6) $\dfrac{1}{z'-z_0}=\dfrac{1}{z-z_0}+\delta \qquad z_0\neq\infty$

的不变点,則令

(7) $t=\exp\left(\pm\dfrac{2\pi i}{\delta}\dfrac{1}{z-z_0}\right)$,

正負号的选擇应当使 F 上 $z\to z_0$ 时, $t\to 0$; 如 $z_0=\infty$ 是抛物变换

(8) $z'=z+\delta$

的不变点,則令

(9) $t=\exp\left(\pm\frac{2\pi i}{\delta}z\right)$,

正負号的选擇仍应使 F 上的 $z\to\infty$ 时，$t\to 0$. 如 z_0 是一 l 階橢圓代换的不变点，z_0' 是該代换的另一不变点，則令

(10) $t=\left(\frac{z-z_0}{z-z_0'}\right)^l$ $\qquad z_0\neq\infty,\ z_0'\neq\infty$

(11) $t=z^{-l}$ $\qquad z_0=\infty,\ z_0'\neq\infty$

(12) $t=(z-z_0)^l$ $\qquad z_0\neq\infty,\ z_0'=\infty$.

根据上面的記法和定义，我們称 $\phi(z)=\phi(z;G)$ 为 G 的（或屬于 G 的）自守函数，如果它滿足下面的条件：

(i) $\phi(z)$ 在 F 上單值而解析，僅在有限数的点上可能为例外.

(ii) 如 $\phi(z)$ 在 F 的 z_0 上解析，則在 D_0 之内，可將之解析开拓至 $z_r=\sigma_r(z_0)$，所有可能的解析开拓（在 D_0 之内）都將導出同样的值 $\phi(z_r)$，且 $\phi(z_r)=\phi(z_0)$.

(iii) 在一奇点 z_0 的一个隣域內，$\phi(z)$ 可以表示成 (3) 的形式.

(iv) $\phi(z)$ 不是一常数.

上面已經說过，这里对自守函数（及基本区域）所下的定义并不是最一般的定义. 上面定义的函数类可導致簡單的公式，并可使 14-7 節的定理一般有效；Ford（(1929, 86 節)把这里所討論的一类自守函数称为簡單自守函数.

自守函数最具特征性的性質是它在 G 的各代换下的不变性；这一性質由(2)式表达. 更一般的說，凡是單变数或多变数的函数能在这一变数或多变数的一羣变换下保持不变，則就可应用自守函数这一名称，这样推廣的一些例子見 14-11, 14-12 節.

14-3. 二十面体羣

一般，自守函数定义中出現的羣 G 是一無限羣（即，由無窮数

的代换所組成)．在这一節里，我們將討論有限羣(卽由有限数的代换組成)的自守函数．这一例子將表明自守函数構作中所包含的一些主要性質，沒有一般情形下的那种复雜性．这里所要討論的羣是二十面体(由 20 个等边三角形組成的正多面体)的对称羣．这一羣可以說是 20 面体轉动为它自身的轉动羣，称为二十面体羣．它恆同于十二面体(由十二个正五边形組成的正多面体)的对称羣，有时也称为十二面体羣．在欧氏作圖法中，十二面体可从立方体作出，立方体的每一棱是十二面体一个面的对角綫．在任一十二面体中，用这种方式共可作五个不同的立方体，十二面体的任一轉动就將產生这些立方体的一种排列，因此，正十二面体羣就是五个元素的置换羣，而它則是一种交代羣(由所有的偶排列組成)．

設一正二十面体內接于 14-1(1) 的球 S_0，幷讓二十面体的棱投影于 S_0，以球心为投影中心．于是得一个由 20 个叠合的球面等边三角形复盖 S_0 的模型．由于每一个三角形的形心可以有 20 个位置，每一个位置上可有三个轉动(轉过 $2\pi/3$)，使模型保持不变，因此，球共有 60 个轉动使模型保持不变．

如果用球極平面射影 14-1(2) 將球 S_0 映成复数 z 平面，則得一 20 个曲綫三角形(在 z 平面上)所成的網，曲綫三角形以圓弧为边界(其意义見 14-1-1 節，因此有的"圓弧"可以是直綫段)．球的 60 个轉动產生 60 个对应变换，这些变换組成一个羣 G_{60}，实現为正二十面体羣．以頂点之一为 z 平面的原点，以实 z 軸作为基本区域的对称軸，于是 G 將包含下面三代换

$$(1)\qquad U(z)=-\frac{1}{z}$$

$$(2)\qquad S(z)=\varepsilon z=\frac{\varepsilon^3 z}{\varepsilon^2}\qquad\qquad \varepsilon=e^{2\pi i/5}$$

$$(3)\qquad T(z)=\frac{(1+\varepsilon)z+\varepsilon^3}{\varepsilon^3 z-(1+\varepsilon)}=\frac{(\varepsilon-\varepsilon^4)5^{-1/2}z-(\varepsilon^2-\varepsilon^3)5^{-1/2}}{-(\varepsilon^2-\varepsilon^3)5^{-1/2}z-(\varepsilon-\varepsilon^4)5^{-1/2}}.$$

在 S 及 T 的情形下，前面二种形式是代换的最簡單形式，后面的

是滿足 14–1(4) 的形式．特殊变换 U, S, T 都是 G_{60} 的生成元。更精确地說，G_{60} 的 60 个代換为

(4)　S^{κ}, $S^{\kappa}TS^{\lambda}$, US^{κ}, $US^{\kappa}TS^{\lambda}$

其中 $\kappa, \lambda = 0, 1, 2, 3, 4$. 在这一表示式中恆等变換是 S_0.

群 G_{60} 是間断的，D_0 是整个平面．基本区域 F 的頂点在点 $z_0 = 0$, z_1, 及 $\bar{z}_1$, 其中

(5)　$z_1 = \varepsilon^2[3/4 + 1/4\sqrt{5} - (15/8 + 3/8\sqrt{5})^{1/2}]$,

而 z_1, $\bar{z}_1$ 則是共軛复数．F 的境界由如下部分組成：联接 z_0 与 z_1 及 z_0 与 $\bar{z}_1$ 的直綫段 A_1, A_2, 联接 z_1 及 $\bar{z}_1$ 的弧 A_3, 交实軸于

(6)　$z_2 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\sqrt{5} + \left(\dfrac{5}{2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{5}\right)^{1/2}$.

G_{60} 的所有代換都是椭圓的，U, S, T 的階分别为 2, 5, 2. 点 z_0, z_2, z_1 分别为 S, T, TS 的不变点．S 將 A_1 映成 A_2, T 將联接 z_1 与 z_2 的 A_3 部分映成联接 $\bar{z}_1$ 及 z_2 的部分．因此，A_3 的二半部作为是分开的弧，z_2 作为是一頂点，而 F 頂点的全集則是 z_0, z_1, z_2, $\bar{z}_1$. 如果有部分的边界按 14–1–4 節移开，則 F 在 60 个变換(4)下的映像將盖滿整个 z 平面而無重复部分．在 S_0 上的三角形網或在 z 平面上的三角形網見 Forsyth (1900, 圖 104, p. 660 及圖 107, p. 667)，其中三角形分六个交替为白的及黑的(陰影)，組成一基本区域．

在目前的情况下，所有自守函数都是 z 的有理函数，可以証明(例如，參看 Fricke, 1926, 第 2 册，第 3 章)，它們可用如下的函数來表达，

(7)　$u(z) = z^{20} + 1 - 228(z^{15} - z^5) + 494z^{10}$

(8)　$v(z) = z^{30} + 1 + 522(z^{25} - z^5) - 10005(z^{20} + z^{10})$

(9)　$w(z) = z(z^{10} + 11z^5 - 1)$

方法如下：設 k, l, m, n 为整数，$n \geqslant 0$ [如 $n = 0$, 則 (10) 中的和应以 0 代替，(11) 中的積应以 1 代換]；令 $\varepsilon_\nu = \pm 1$, a_ν 及 b_ν 为非零

常数，$\nu=1,\cdots,n$; 并設

(10) $\quad 20k+30l+12m+60\sum_{\nu=1}^{n}\varepsilon_\nu=0.$

則

(11) $\quad \phi(z)=u^k v^l w^m \prod_{\nu=1}^{n}(a_\nu u^3+b_\nu v^2)^{\varepsilon_\nu}$

是 G_{60} 的一个自守函数，而每一自守函数都可以表示为这一形式.由于三函数 u, v, w 都不是独立的，并满足关系

(12) $\quad u^3-v^2+12^3w^5=0,$

故知表示式(11)不是唯一的.

关于(11)式所定义的自守函数的零点和極点位置的討論，以及 G_{60} 的自守函数理論在一般五次方程上的应用，見 Fricke(1926, 第 2 册，第 2 及第 3 章).

对应代換的所有有限羣都是可数的. 關于这些羣的自守函数的理論見 Fricke (1926, 第 2 册第 2 章).

14-4. 拋物代換

如果羣 G 的所有代換，除了恆等代換之外，都是拋物代換，則可以証明羣的所有拋物代換具有同样的不变点. 設公共的不变点在無窮远，这样的假設对我們的討論的一般性并不有所限制. 在这一情况下，D_0 將是平面的有限部分，即所有有限的复数 z 的集合(又称为有孔 z 平面或在無窮远有孔的平面). 間断羣的本身將取如下二形式之一. 或者是有一固定的实数或复数 ω，使得

(1) $\quad \sigma_r(z)=z+r\omega, \qquad r=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots$

或者是有二个固定的实数或复数 ω 及 ω'，使得 ω/ω' 不为实数，羣的代換則为

(2) $\quad \sigma_{rr'}(z)=z+r\omega+r'\omega' \qquad r, r'=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots$

在代換(1)所組成的羣的情形下，

(3) $\quad t=\exp\left(\dfrac{2\pi iz}{\omega}\right)$

是 G 的一个自守函数. t 的任一半純函数(＝除了在極点以外解析的單值函数)是一自守函数,而每一自守函数都具有这一形式.因此,在这一情形下, G 的自守函数都是半純周期函数,周期为 ω.

如果 G 由代換(2)組成,則 G 的自守函数都是 z 的半純双周期(即橢圓函数,見 13-11 節)函数,周期为 ω, ω'.

初看起來,好像拋物代換的羣可有三个或多个周期. 但是,可以証明(見 13-10 節),一个复变数的半純函数如果具有二个以上独立周期,則必为一常数,因此,具有二个以上的独立平移的羣沒有自守函数.

推廣. 多周期函数. 对于几个独立生成元組成的平移羣,如果我們所考慮的不是單一复变数函数,而是 p 个复变数($p=2, 3, 4, \cdots$)的半純函数,則將具有自守函数. 这种函数可以具有 $2p$ (或少一点)个周期. 所謂周期,以 $2p^2$ 个常数

$$(4) \qquad \omega_{\mu\alpha} \qquad\qquad \mu=1, 2, \cdots, p; \alpha=1, 2, \cdots, 2p$$

來定义. $\omega_{\mu\alpha}$ 不能任意选定,应遵从一定的条件. 可以証明,經变数及周期的適当綫性变换之后,可得

$$(5) \qquad \omega_{\mu\nu}=i\pi\,\delta_{\mu\nu}/e_\mu, \qquad \omega_{\mu,\,p+\nu}=a_{\mu\nu}=a_{\nu\mu},\ \mu, \nu=1, \cdots, p.$$

式中 $\delta_{\mu\nu}$ 为 Kronecker 符号, e_μ 都是正整数,且

$$(6) \qquad \operatorname{Re}\sum_{\mu=1}^{p}\sum_{\nu=1}^{p} a_{\mu\nu}x_\mu x_\nu<0,$$

其中 x_α 都是实数,滿足条件

$$(7) \qquad \sum_{\alpha=1}^{p} x_\alpha^2>0.$$

設 p 个复变数的單值解析函数 $f(u_1, \cdots, u_p)$ 除了在不是本性奇点的一些孤立点上之外,对于所有 $u_1, \cdots, u_p$ 的有限値都正則,并且不能表达为变数的小于 p 个綫性組合的函数. 我們將称这一函数为 $u_1, \cdots, u_p$ 的 **$2p$ 重周期函数**,如果对于任一整数 $n_{\mu,\alpha}$, $\mu=1, \cdots, p, \alpha=1, \cdots, 2p$, 及

(8) $$\eta_\mu = \sum_{\alpha=1}^{2p} n_{\mu\alpha}\omega_{\mu\alpha} \qquad \mu=1, \cdots, p$$

有

(9) $$f(u_1+\eta_1, \cdots, u_p+\eta_p) = f(u_1, \cdots, u_p),$$

这里 f 在所有有限的 $(u_1, \cdots, u_p)$ 上正則，只要 $\omega_{\mu\alpha}$ 对至少一个 μ 及所有实的 $\lambda_1, \cdots, \lambda_{2p}$，满足关系

$$\sum_{\alpha=1}^{2p} \lambda_\alpha \omega_{\mu\alpha} \neq 0,$$

$\lambda_1 = \cdots = \lambda_{2p} = 0$ 的情形当然为例外.

可以証明，对于滿足(5)及(6)的周期 $\omega_{\mu\alpha}$ 的任一已知集，必存在有 $2p$-重周期函数. 常存在有 p 个这样的函数，它們是代数独立的；任何 $p+1$ 个这样的函数都可以用一代数关系來加以联系($p=1$ 的情形見 13-11 節). 每一个 $2p$-重周期函数都可以表达为適当地选择的 θ 函数的有理函数，定义为 p-重無窮級数如下：

(10) $$\theta(u_1, \cdots, u_p) = \sum_{m_1, \cdots, m_p=-\infty}^{\infty} \exp\left(\sum_{\mu=1}^{p} \sum_{\nu=1}^{p} a_{\mu\nu} m_\mu m_\nu + 2\sum_{\mu=1}^{p} m_\mu u_\mu\right)$$

其中 $a_{\mu\nu}$ 是实数或复数，使得 $\operatorname{Re} a_{\mu\nu}$ 組成一負的定对称矩陣，卽，$a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu}$，而对于所有滿足条件

$$\sum_{\mu=1}^{p} x_\mu^2 > 0$$

的实 $x_1, \cdots, x_p$，有

(11) $$\operatorname{Re}\left(\sum_{\mu=1}^{p} \sum_{\nu=1}^{p} a_{\mu\nu} x_\mu x_\nu\right) < 0.$$

关于多重周期函数的理論以及它与單变数代数函数之間及与阿培耳函数理論之間的关系見 Baker (1907), Krazer & Wirtinger (1901–1921).

14-5. 具有二个不变点的無限循环羣

設 σ 为一双曲或斜駛代換. 如 ζ_1 及 ζ_2 为 σ 的不变点，則这

一代換可表示为如下形式:

$$\frac{z'-\zeta_1}{z'-\zeta_2}=\rho\, e^{in\phi}\frac{z-\zeta_1}{z-\zeta_2}$$

或

$$z'-\zeta_1=\rho\, e^{in\phi}(z-\zeta_1)$$

根据 $\zeta_2\neq\infty$ 或 $\zeta_2=\infty$ 而定,至于 ζ_1, 則假設总 $\neq\infty$. 这里 $\rho>0$, $\rho\neq1$. 如 ϕ 为 2π 的整数倍数,則代換是双曲的,否則是斜駛的.

現在來考察由 σ 所生成的羣 G. G 的元素为 σ^n, $n=0, \pm1, \pm2, \cdots$. 代換 σ^n 可表示为

$$(1)\qquad \frac{z'-\zeta_1}{z'-\zeta_2}=\rho^n e^{in\phi}\frac{z-\zeta_1}{z-\zeta_2}\qquad \zeta_1, \zeta_2\neq\infty$$

或

$$(2)\qquad z'-\zeta_1=\rho^n e^{in\phi}(z-\zeta_1)\qquad \zeta_1\neq\infty, \zeta_2=\infty,$$

其中 ρ, ϕ 都是上面介紹过的量, n 为任一(正的或負的)整数.

羣 G 在所有異于 ζ_1 及 ζ_2 的复数組成的域 D_0 (复数平面穿孔于 ζ_1 及 ζ_2)上是間断的. 为了得出一基本区域 F, 設 C_0 为任一分开 ζ_1 及 ζ_2 的圓(因此任一連結 ζ_1 及 ζ_2 的連續曲綫必与 C_0 相交),并設 C_0 由 σ^n 映成圓 C_n, 圓 C_n, $n=0, \pm1, \pm2, \cdots$ 的序列在 G 下是不变的. 这一序列中沒有二个圓具有公共点. 二相鄰的圓 C_n 及 C_{n+1} 所圍成的任一区域 (二圓中一个是区域的一部分,另一則否)即可作为基本区域 F.

G 的自守函数是复变数

$$(3)\qquad u=\log\frac{z-\zeta_1}{z-\zeta_2}\qquad \zeta_1, \zeta_2\neq\infty$$

$$u=\log\,(z-\zeta_1)\qquad \zeta_1\neq\infty, \zeta_2=\infty$$

的橢圓函数,周期为

$$(4)\qquad \omega_1=\log\rho+i\phi,\ \omega_2=2\pi i.$$

双周期函数之可以作为 G 羣的自守函数,可用下列情形來說明. 羣 G 与 14-4 (1) 的羣看來主要是相同的;这二个羣之間沒

有代数上的差别,它們都是同構的.但在所含的区域上却有很大的不同.14-4 (1) 的区域 D_0 (平面穿孔于 ∞) 及基本区域 F (無限帶域)都是單連通的;而本節的区域 D_0 (平面穿孔于二点) 及基本区域 F(無公共点的二圓之間的区域)則是双連通的.在一双連通区域(如 F)上,函数可以到处解析,但却是多值的,这与 14-2 節的条件 (ii) 不同.我們需要一种周期性,使函数在 F 上單值,而第二种則將能根据 14-2(2) 把它轉化为 F 的映像.

关于在靜电学边值問題上的应用見 Burnside (1891, 1892),其中所研究的是 $2n$ (也可說是 2) 个边界圓的情形.

14-6. 橢圓模函数

14-6-1. 模羣

設 M 为所有对应代換

$$(1)\qquad z'=\frac{az+b}{cz+d}\qquad\qquad ad-bc=1$$

組成的羣,其中 a, b, c, d 都是整数.我們称 M 为模羣(見 13-24 節):它是無限階的,所有它的代換都將上半平面 $\operatorname{Im} z>0$ 映成自身.設 D_0 为上半平面.則 M 在 D_0 上間断.点集

$$(2)\qquad \operatorname{Im} z>0,\ |z|\geqslant 1,\ -\tfrac{1}{2}\leqslant \operatorname{Re} z\leqslant 0$$

$$\text{或}\ |z|>1,\qquad 0<\operatorname{Re} z<\tfrac{1}{2}$$

可作为基本区域 F. F 的頂点在点

$$(3)\qquad z_1=-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i\sqrt{3},\ z_2=i,\ z_3=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i\sqrt{3},\ z_4=\infty.$$

由 $a=b=d=1,\ c=0$ 所定义的代換 σ, 或

$$(4)\qquad z'=\sigma(z)=z+1$$

將連接 z_1 至 z_4 的綫段(射綫)映成連結 z_3 至 z_4 的綫段,这时以 z_4 为抛物不変点.由 $a=d=0,\ b=-1,\ c=1$ 所定义的代換 τ,或

$$(5)\qquad z'=\tau(z)=-\frac{1}{z}$$

將 z_1 与 z_2 間的單位圓的上部一半映成連結 z_3 与 z_2 的弧，以 z_3 为一个不変点（另一不变点在下部半平面上）．

羣 M 由 σ, τ 生成．由于 $\tau^2 = I$，所以 M 的任一代換都可以寫成如下形式

$$\sigma^{n_1}\tau\sigma^{n_2}\tau \cdots \sigma^{n_{l-1}}\tau\sigma^{n_l}$$

其中

$$l = 1, 2, 3, \cdots, n_1, n_l = 0, 1, 2, \cdots, \quad n_2 \cdots, n_{l-1} = 1, 2, 3, \cdots$$

在这些代換下，F 的映像將填滿上部半平面，而無重复部分．

14-6-2. 模函数 $J(z)$

模羣 M 的絕对不变式 $J(z)$ 出現在橢圓函数理論中（变数常用 τ 表示，見 13-24 節）．它在橢圓函数理論及应用中都很重要；与它密切相关的一个函数就是 Picard 用以証明 Picard 定理的关鍵．$J(z)$ 的主要性質如下：

(i) 函数 $J(z)$ 在 D_0（上半平面）上單値而解析，对于模羣 M 的所有代換 14-6(1)，有

$$J(z') = J\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = J(z) \text{（在 } D_0 \text{ 上的）}. \tag{6}$$

(ii) 函数 $w = J(z)$ 將 F（由 14-6(2) 确定）單純地映成（整个）w-平面，使 F 的边界映成为 $-\infty$ 至 1 的实 w-軸，且

$$J(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} i\sqrt{3}) = 0, \; J(i) = 1, \; J(\infty) = \infty. \tag{7}$$

(iii) 根据 (i) 及 (ii)，$J(z)$ 是 M 的自守函数，而 M 的每一自守函数則是 $J(z)$ 的有理函数．

此外，实 z-軸上的每一点都是 $J(z)$ 的奇点，实軸是 $J(z)$ 的自然边界．

用艾生司丁級数表示的 $J(z)$ 的表达式　設 ω, ω' 为二个实数或复数，$\mathrm{Im}(\omega'/\omega) > 0$．把 ω 及 ω' 作为半周期，作韋尔司特拉斯不变式

$$(8)\qquad g_2(\omega,\omega')=60\,\Sigma'(m\omega+n\omega')^{-4}$$

$$g_3(\omega,\omega')=140\,\Sigma'(m\omega+n\omega')^{-6}$$

[見 13-12(13)]，式中 Σ' 表示和过所有的整数对 (m,n) 但 $m=n=0$ 应除外. 再令

$$(9)\qquad \Delta(\omega,\omega')=g_2^3-27\,g_3^2$$

[見 13-13(7)]. 顯然，g_2^3/Δ 是 ω 及 ω' 的零次齐次函数，因此只依賴于

$$(10)\qquad z=\omega'/\omega$$

我們把它当作是一个取値于上半平面的复变数. 我們有

$$(11)\qquad J(z)=g_2^3/\Delta.$$

[見 13-24(4)].

在

$$(12)\qquad E_2(z)=\omega^4 g_2(\omega,\omega')=60\,\Sigma'(m+nz)^{-4}$$

$$E_3(z)=\omega^6 g_3(\omega,\omega')=140\,\Sigma'(m+nz)^{-6}$$

中，把 m 及 n 具有一不变的最大公因数 d，使 $n=sd$, $m=-td$, $s\geqslant 0$, s 及 t 互質的那些項集併. 如 $s=0$，則 $t=1$. 应用由 1-13(16) 式導出的結果

$$(13)\qquad \sum_{d=1}^{\infty}\frac{1}{d^4}=\frac{\pi^4}{90},\quad \sum_{d=1}^{\infty}\frac{1}{d^6}=\frac{\pi^6}{945}$$

最后可得

$$(14)\qquad E_2(z)=\frac{4}{3}\pi^4\left[1+\sum_{(s,t)=1,\,s>0}(sz-t)^{-4}\right]$$

$$E_3(z)=\frac{8}{27}\pi^6\left[1+\sum_{(s,t)=1,\,s>0}(sz-t)^{-6}\right].$$

在最后二和式中，s 取所有正整数値，而对于每一 s, t 取所有互質于 s 的整数値(正的，負的及零).

級数(14)就是艾生司丁級数的例子. 这一級数的特征性質是和式指标上根据数論条件所加的限制.

(8)式中的表达式 g_2 及 g_3 分別称为 -4 次及 -6 次的齐次模形式(即用齐次变量 ω, ω' 来表达的模形式), (14)式中的 E_2 及 E_3 称为非齐次模形式(即用非齐次变量 z 来表达的模形式). 关于模形式的定义見 Klein 及 Fricke (1890, 1892) 及本書的 14-8-3 節.

如 a, b, c, d 为整数, $ad-bc=1$, 則 $s'=as-ct$, $t'=dt-bs$ 所取的值过互質整数对的完全集, 如果 s, t 取值于这一集; 应当理解: s', t' 及 $-s', -t'$ 对中只有一对出現于这一集之中. 由此可知, 对于 M 的任一代换 14-6(1),

$$(15)\quad E_2\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)=(cz+d)^4 E_2(z)$$

$$E_3\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)=(cz+d)^6 E_3(z),$$

且

$$(16)\quad J(z)=\frac{[E_2(z)]^3}{[E_2(z)]^3-27[E_3(z)]^2}$$

滿足(6).

从公式(14)可知 $E_2(z)$ 及 $E_3(z)$ 都是 D_0 (上半平面)上 z 的單值解析函数, 实軸就是这些函数奇点的軌跡. 更進一步討論表明, $J(z)$ 也具有同样的性質[見上面的(i)].

用 θ 函数表示的 $J(z)$ 的表达式.

令

$$(17)\quad q=e^{i\pi z} \qquad |q|<1.$$

由于代换 $z'=z+1$ 在 M 中, 故知 $J(z)$ 是 z 取值于上半平面时 z 的一个周期函数, 周期为 1. 因此, $J(z)$ 在穿孔于 $q=0$ 的單位圓中, 將是 q 的偶解析函数, 可展开为 q 偶次方的級数.

这里所說的展开可根据下式進行,

$$(18)\quad J(z)=\frac{\pi^8}{54}\,\frac{(\theta_2^8+\theta_3^8+\theta_4^8)^3}{\theta_1'^8}=\frac{4\pi^8}{27}\,\frac{(\theta_3^8-\theta_2^4\theta_4^4)^3}{\theta_1'^8}$$

这一公式系从 13-24(5), 13-19(22) 及 (23) 式導來,其中

$$(19)\quad \theta_1' = \theta_1'(0) = 2\pi q^{1/4} \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n})^3$$

$$\theta_2 = \theta_2(0) = 2q^{1/4} \prod_{n=1}^{\infty} [(1-q^{2n})(1+q^{2n})^2]$$

$$\theta_3 = \theta_3(0) = \prod_{n=1}^{\infty} [(1-q^{2n})(1+q^{2n-1})^2]$$

$$\theta_4 = \theta_4(0) = \prod_{n=1}^{\infty} [(1-q^{2n})(1-q^{2n-1})^2]$$

[見 13-19(16)]都是以 0 为自变数的 θ 函数. 从(18)及(19)可得如下形式的展开式:

$$(20)\quad 1728\, J(z) = q^{-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^{2n} \qquad q = e^{i\pi z}$$

这一式当 $0<|q|<1$ 时收斂. 顯然系数 a_n 是整数: 当 $0\leqslant n\leqslant 24$ 时的 a_n 的数值見 Zuckerman (1939). 从(18)可得的另一表达式为

$$(21)\quad J(z) = \frac{\left[1+240\sum_{n=1}^{\infty} n^3 q^{2n}/(1-q^{2n})\right]^3}{12^3 q^2 \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n})^{24}}.$$

与超比級数的关系

应用 2-7-2 節, 从 $J(z)$ 的性質 (ii) 可知 $J(z)$ 的反函数可用超比函数來表示. 还可参看 13-24(2) 13 24(5) 及 13-8(5)-(6).

令

$$(22)\quad F(J) = {}_2F_1\left(\frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{2}{3}; J\right)$$

$$F^*(J) = {}_2F_1\left(\frac{5}{12}, \frac{5}{12}, \frac{4}{3}; J\right),$$

其中 ${}_2F_1$ 为高斯超比級数, 由 2-1(2) 定义, 引入

(23) $\gamma=\frac{F(1)}{F^*(1)}=\left[\frac{\Gamma\left(\frac{11}{12}\right)}{\Gamma\left(\frac{7}{12}\right)}\right]^2\frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}$

(24) $\lambda=(2-\sqrt{3})\,\gamma.$

于是,以 $J=J(z)$, $F=F(J)$, $F^*=F^*(J)$, 可以証明

(25) $z=e^{2\pi i/3}\frac{F-\lambda e^{i\pi/3}J^{1/3}F^*}{F-\lambda e^{-\pi i/3}J^{1/3}F^*}.$

这一方程給出了單位圓內部任一 J 所对应的 z 的值. 在單位圓的外部,有

(26) $2\pi iz=-\log J-3\log 12+\frac{G\left(\frac{1}{12},\ \frac{5}{12};\ 1;\ J^{-1}\right)}{{}_2F_1\left(\frac{1}{12},\ \frac{5}{12};\ 1;\ J^{-1}\right)}$

$|J|>1,\ |\arg(1-J)|<\pi,$

式中的 ${}_2F_1$ 仍为高斯級数,且

(27) $G(a,b;1;u)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(n!)^2}[\psi(a+n)+\psi(b+n)$

$-2\psi(n+1)+\psi(a)+\psi(b)-2\psi(1)],$

ψ 表示 γ 函数的对数導数(見 Fricke, 1930).

关于模不变式在数論上的应用見 14-6-5 節. 在复变数函数論上的应用(应用于 Picard 定理的証明) 見 Hurwitz 及 Courant (1925) 等.

14-6-3. 模羣的子羣

現在來研究模羣的某些子羣;这些子羣將以对应代換

(28) $z'=\frac{az+b}{cz+d}\qquad ad-bc=1$

中整数 a,b,c,d 的同余性質來定义.

設 m 为一正整数, M_m 为 M 的代換 (28) 中所有合乎下列条

件的代换的集合，即

(29) $a-1, b, c, d+1$ 或 $a-1, b, c, d-1$

都是可被 m 除尽的整数．容易看出 M_m 本身也是一个羣：称为模羣 M 的 m 級 (德文为 *Stufe*) 主同余子羣．每一个 M_m 在半平面 $\operatorname{Im} z>0$ 上間断．M_m 的基本区域可以这样來作出：適当地选擇 M 的基本区域 F [由(2)定义] 的 γ_m 个"副本"，組成这些"副本"的併集即得．所謂 F 的"副本"就是模代換將 F 映成的区域．如

(30) $m=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$,

式中 $p_1, \cdots, p_k$ 是不同的質数，$\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ 是正整数，則 $\gamma_2=6$，且

(31) $\gamma_m=\frac{1}{2}m^3(1-p_1^{-2})(1-p_2^{-2})\cdots(1-p_k^{-2})$, $\qquad m>2$.

下面我們將討論 $m=2, 5$ 的情形，其他的 M_m 見 Fricke (1926), Klein 及 Fricke (1890, 1892).

如 $m=2$，以 a, d 为奇整数，b, c 为偶整数，得式(28)．M_2 是 λ 羣(見 13-22, 13-24 節)．M_2 的基本区域 F_2 可定义为

(32) $\operatorname{Im} z>0,\ |z-\frac{1}{2}|>\frac{1}{2},\ |z+\frac{1}{2}|\geqslant\frac{1}{2},\ -1\leqslant\operatorname{Re} z<1.$

F_2 的頂点为

(33) $z_1=-1,\ z_2=0,\ z_3=1,\ z_4=\infty.$

F_2 的边界由直綫 $\operatorname{Re} z=\pm1$ 在上半平面的一段及圓 $|2z\pm1|=1$ 組成．以 $A_1, \cdots, A_4$ 表示边界的部分如下：

(34) A_1: $\operatorname{Im} z\geqslant0,\quad \operatorname{Re} z=-1$

A_2: $\operatorname{Im} z\geqslant0,\quad |z+\frac{1}{2}|=\frac{1}{2}$

A_3: $\operatorname{Im} z\geqslant0,\quad |z-\frac{1}{2}|=\frac{1}{2}$

A_4: $\operatorname{Im} z\geqslant0,\quad \operatorname{Re} z=1.$

根据(32)，A_1 及 A_2 屬于 F_2，而 A_3 及 A_4 并不屬于 F_2．λ 羣由下列代換生成(根据 14-1-4 的說明)，

(35) $z'=\sigma(z)=z+2,\ z'=\tau(z)=\dfrac{z}{2z+1}.$

在 13-24 節中我們已經知道 $k^2=\lambda(z)$ 是 M_2 的一个自守函

数．这一函数在上部半平面上單值而解析，在 M_2 的代换下保持不变，將 F_2 映成整个 w-平面；此外，M_2 的每一自守函数都是 k^2 的有理函数．由于 M_2 是 M 的一个子羣，而 $J(z)$ 是 M 的一个自守函数，故知 $J(z)$ 也是 M_2 的一个自守函数，因此是 k^2 的有理函数．它的顯表示式为

$$(36)\quad J(z)=\frac{4}{27}\frac{(1-k^2+k^4)^3}{k^4(1-k^2)^2}.$$

函数 $\lambda(z)$ 可非常容易地用 θ 函数來定义[見 13-20(14)]．我們有

$$(37)\quad \lambda(z)=k^2=\frac{\theta_2^4(0,q)}{\theta_3^4(0,q)}=16q\prod_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1+q^{2m}}{1+q^{2m-1}}\right)^8$$

$$=16\left(\frac{\sum_{m=0}^{\infty}q^{(m+\frac{1}{2})^2}}{1+2\sum_{m=1}^{\infty}q^{m^2}}\right)^4$$

此处

$$(38)\quad q=e^{i\pi z},\ |q|<1.$$

$\lambda(z)$ 的級数展开式是艾生司丁型的級数，可从韋尔司特拉斯 $\wp$-函数理論中推出．

函数

$$(39)\quad w=\lambda(z)$$

將 z-平面上的区域

$$(40)\quad \operatorname{Im} z\geqslant 0,\ 0\leqslant \operatorname{Re} z\leqslant 1,\ |z-\tfrac{1}{2}|>\tfrac{1}{2}$$

映成 w-平面的上半平面，使点 $z=0,1,\infty$ 分别对应于 $w=1,\infty,0$．这就是說，像在 $J(z)$ 的情形中一样，(39)的反函数可用超比函数來表达．根据 13-19(3) 及 13-8(5) 式有

$$(41)\quad z=i\,\frac{{}_2F_1(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;1-\lambda)}{{}_2F_1(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;\lambda)},$$

其中 ${}_2F_1$ 是高斯級数．

Nehari (1947) 提出了 $\lambda(z)$ 理論的一个独立門徑，他考察的是函数方程

(42)　$f(q)=4[f(q^2)]^{1/2}\{1+[f(q^2)]^{1/2}\}^{-2}$

并証明：条件

(43)　$f(0)=0,\ f'(0)>0,\ f(q)$ 在 $|q|<1$ 时解析

确定了 (42) 的一个唯一的解 $f_0(q)$. 我們有 $f_0(q)=\lambda(z)=k^2$，其中 q 与 z 的关系見 (38)，而 (42) 式則主要是一 Landen 变换（見 13-23 節）.

現在來研究 M_5. M_5 的基本区域 F_5 是由 F 在上半平面中 $\gamma_5=60$ 个"副本"組成. 把 F 映成 60 个副本的 60 个模代換就是 M 中 M_5 的 60 个陪集的表示［关于子羣的陪集这一概念可参看 Van der Waerden (1949)］.

存在有一个自守函数 $A(z)$，它和 M_5 与 F_5 的关系就和 $J(z)$ 与 M 及 F 或 $\lambda(z)$ 与 M_2, F_2 的关系一样. 定义 $A(z)$ 的顯表达式为

$$(44)\qquad A(z)=q^{2/5}\frac{\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m q^{5m^2+3m}}{\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m q^{5m^2+m}}$$

M_5 的每一个自守函数都是 $A(z)$ 的有理函数；絕对不变式 $J(z)$ 是 M 的每一子羣、因而也是 M_5 的每一子羣的一个自守函数，因而必可以表达为 $A(z)$ 的有理函数. 实际的表达式为

$$(45)\qquad \frac{J}{J-1}=\frac{[u(A)]^3}{[v(A)]^2},\quad J=-\frac{[u(A)]^3}{1728[w(A)]^5},$$

其中 u, v, w 都是多項式，定义于 14-3(7), (8), (9). 公式(45) 在五次方程的 F. Klein 解法中有着極为重要的地位.

对于所有的正整数 l，函数 $[\lambda(z)]^{1/(2l)}$ 是 M 的某一子羣的自守函数. 在而且只有在 $l=1, 2$ 或 4 的时候，才有一个主同余子羣（分别为 M_4, M_8 及 M_{16}），它的 $[\lambda(z)]^{1/(2l)}$ 是一自守函数.

14-6-4. 模方程

如果 $f(z)$ 或者为 $J(z)$，或者为主同余子羣的对应自守函数[如 M_2 的 $\lambda(z)$，M_5 的 $\Lambda(z)$]，则对于任一整数 $l>1$，函数 $f(z)$ 与 $f(lz)$ 可用一代数方程來联系．这样的方程称为模方程．

在絕对不变式的情形下，我們有下面的情形．对于任一整数 $l>1$，函数 $J(lz)$ 滿足 $l+1$ 次的代数方程．这一方程中的系数都是 $J(z)$ 的有理函数，而在这些有理函数中的系数則是有理数．这一方程的根为

$$J(lz),\ J\left(\frac{z}{l}\right),\ J\left(\frac{z+1}{l}\right),\ \cdots,\ J\left(\frac{z+l-1}{l}\right)$$

現在我們來求 $J(2z)$ 所滿足的模方程．应用簡号

(46)　$j=12^3J(z),\ j^*=12^3J(2z)$，

則方程为

(47)　$$j^{*3}+j^3-(jj^*)^2+2^4\cdot 3\cdot 31jj^*(j+j^*)-2^4\cdot 3^4\cdot 5^3(j^2+j^{*2})$$
$$+3^4\cdot 5^3\cdot 4027\,jj^*+2^8\cdot 3^7\cdot 5^6(j+j^*)$$
$$-2^{12}\cdot 3^9\cdot 5^9=0.$$

14-6-5. 在数論上的应用

橢圓模函数及有关函数（Eisenstein 級数，θ 函数）在数論中有着重要的地位．其某些应用可参看 17-2, 17-3, 17-4 節及 Hardy (1940)．絕对不变式 $J(z)$ 具有这样的性質，卽 $J(a)$ 是一整代数数，只要 a 具有正的虛部，而且是一整系数二次方程的根．为某一 $J(a)$ 所滿足的整系数代数方程就是所謂虛二次数体的类方程[見 Fricke, (1928), Fueter (1924, 1927)]，还可参看 Schneider (1936), Hecke (1939).

新的進一步的發展始自 Hecke (1935, 1937, 1939, 1940 a, 1940 b)；并見 Petersson (1939)，关于某些数值結果，見 Zassen-

haus (1941).

与本節有关的某些結果，虽然看起來是更一般定理的特殊情形，可参看 Siegel (1935).

14-7. 自守函数的一般理論

在本節中，我們將扼要地介紹一下对应代换的間断羣的分类，并提出一些單变量自守函数的一般定理. 这里所提到的結果都以本章前几節的定义为基礎；上面我們已經說明，这些定义并不是文献上最一般的定义.

14-7-1. 羣的分类

自守函数常按其所屬的羣來分类. Poincaré 提出了对应变换的所有間断羣(見 14-1-3 節)的一个分类法. Fricke 对此作了進一步的發展，他把 Fricke 及 Klein (1897) 著作第一卷的三分之一几乎都用于詳細的分类，其結果詳見 Fricke 及 Klein (1897, 第 1 卷) 的 p. 164, 165.

像在开头几節中一样，命 G 为对应代换 $\sigma_r (r=0, 1, 2, \cdots)$ 的羣，这里

$$(1) \qquad \sigma_r(z)=\frac{a_r z+b_r}{c_r z+d_r}, \qquad a_r d_r-b_r c_r=1.$$

如果存在有一个圓 C_0，可以用每一个 σ_r 將它映成为自身，則羣 G 就称为 **Fuchs 羣**. 圓 C_0 称为 G 的**主圓** (Principal Circle, 德文为 Hauptkreis)，同时 G 又称为具有主圓的羣. 如 G 具有一主圓，則 z 平面的一对应变换可用以將 C_0 映成一标准圓. 这种标準化有两种: (i) C_0 是一單位圓. 用所有的 σ_r 將單位圓映成自身的必要和充分条件为:

$$(2) \qquad d_r=\bar{a}_r,\ c_r=\bar{b}_r,\ |a_r|\neq|b_r|, \qquad r=0, 1, 2, \cdots$$

式中一划代表共軛复数(見 Copson 1935, 8-31 節或其他著作).

(ii)C_0 为实軸. 用所有的 σ_r 將实軸映成自身的必要和充分条件为

(3) a_r, b_r, c_r, d_r 都是实数, $a_r d_r - b_r c_r \neq 0$, $r = 0, 1, 2, \cdots$

模羣及其子羣就是以实軸为主圓的間断羣的例子.

一般說来, G 可以有極限点(見 14-1-4 節): 設 l 为極限点的数目. 可以証明, l 的所有可能値为 0, 1, 2 及 ∞. 如 $l=0$, 則 G 顯然是一有限羣(这种羣的例子見 14-3 節). 如 $l=1$, 則可以証明 G 是拋物代換的羣, 这羣的所有代換具有相同的不变点: 这种羣已在 14-4 節中論及. 如 $l=2$, 則得 14-5 節中所討論的情形, 及稍較一般的情形, 其中 G 与下面二代換所生成的羣相似:

(4) $\sigma(z) = az, \tau(z) = \varepsilon/z$

式中 ε 是 1 的根, 卽 $\varepsilon^m = 1$, m 为某一正整数, 見 Fricke 及 Klein (1897). 如 $l=\infty$, G 的極限点組成一無限点集, 这一集的任一極限点(卽聚点)也是 G 的一个極限点(意义見 14-1-4 節定义).

如果主圓 C_0 存在, 而 C_0 的每一点是 G 的極限点, 則称 C_0 为 G 的**極限圓**, G 本身則称为**第一类 Fuchs 羣**. 反之, 如極限点在任何地方都不密集于 C_0, 則 G 称为**第二类 Fuchs 羣**. 在所有包括無窮多的極限点的其他情形下, 我們称 G 为 **Klein 羣**. 如 $l=\infty$, 且不存在有主圓, 則可以証明 G 应包含斜駛代換. 14-6-3 節中討論的模羣及其子羣就是以实軸为極限圓的羣的例子.

14-7-2. 自守函数一般定理

設 G 为对应代換的一个無窮間断羣(見 14-1-3 節), 設 F 为 G 的一个基本区域(見 14-1-4 節), 幷設 $\phi(z), \phi_1(z) \cdots$ 为 G 的自守函数(意义見 14-2 節). 下面的一般定理对自守函数有效, 对应于 13-11 節橢圓函数的一般定理[橢圓函数是二平移所生成的羣 14-4(2) 的自守函数].

每一个自守函数在 F 上有極. 在 F 上, 零点数和極点数是相同的. 一个自守函数在 F 上取每一个値的次数是相同的.

同一羣的任二自守函数都是代数相关的，也就是說，对于 G 的任二自守函数 $\phi_1(z)$ 及 $\phi_2(z)$，必存在一两变数的常系数多項式 $P(u, v)$，使得 $P(\phi_1(z), \phi_2(z))=0$，这一关系对于所有一切使 $\phi_1(z)$ 及 $\phi_2(z)$ 有定义的 z 値都存立.

对于任一給定的羣 G，必可以求得二个自守函数 $\phi_1(z)$ 及 $\phi_2(z)$，使得 G 的任一自守函数都是 $\phi_1(z)$ 及 $\phi_2(z)$ 的常系数有理函数. 13-14 節中用 $\wp(z)$ 及 $\wp'(z)$ 表示的橢圓函数表达式就是这一定理的一个例子.

如果存在有 G 的一个自守函数 $\phi_0(z)$，在 F 上具有一一階極点，并在 F 的其他处解析，則 G 的每一自守函数必是 $\phi_0(z)$ 的有理函数. 这种函数的例子見 14-6-2 節的 $J(z)$，14-6-3 節的 $\lambda(z)$ 及 $\Lambda(z)$. 可以証明，这样一个 $\phi_0(z)$ 存在的充要条件是 F 的“格”等于零；关于基本区域的格的定义見 14-8-2 節或 Fricke 及 Klein (1897) 或 Ford (1929).

如果上段所述的自守函数 $\phi_0(z)$ 存在，并設 $z=\eta(w)$ 为 $w=\phi_0(z)$ 的反函数（在上述情形下，反函数是存在的，因为 $\phi_0(z)$ 取每一値恰巧一次），則 $\eta(w)$ 可以用商 y_1/y_2 來表示，此处 y_1, y_2 是綫性微分方程

$$\frac{d^2y}{dw^2}=u(w)y \tag{5}$$

的二特解，u 是 w 的有理函数［在更一般的情形下，u 將是一代数函数，見 Ford, 1929, 44 節］.方程(5)等价于超比方程的特殊情形見 14-10 節. 在 $J(z)$，$\lambda(z)$，$\Lambda(z)$ 的情形下，对应于(5)的微分方程都是特殊超比方程.

对于 G 的每一自守函数，每一極限点（其意义見 14-1-4 節）是一本性奇点.特别是，在第一类 Fuchs 羣的情形下，对于 G 的所有自守函数，極限圓是其自然边界；極限圓外的解析开拓是不可能的.

14-8. 自守函数的存在与構作

14-8-1. 一般說明

自守函数的理論具有二个基本問題．第一个基本問題是枚举所有可能的基本区域(或枚举所有满足一定条件的基本区域)，以及作出屬于每一个基本区域的羣；第二个問題是作出屬于一个給定羣的所有自守函数．

求具有一基本区域的所有羣的問題在具有極限圓的羣的情形下已經完全解出；見 Fricke 及 Klein (1897)．这一解法需要非欧几何学的完备知識．即使在求一已知羣的基本区域的唯一标准形式的較困难問題中，在有限数代换生成而具有極限圓的羣的情形下，部分答案也是已知的．

至于第二个問題，即作出屬于一給定羣(具有一給定的基本区域)的所有自守函数的問題，則从 14-7-2 節的一般定理可知，基本的問題是：求出二个自守函数，所有其他自守函数都可用这二函数的有理形式表示，并求出屬于同一羣的自守函数之間的代数关系．达到这一目的的两个有力方法在下面 14-8-2，14-8-3 節討論．

一般，求顯表示式是很困难的：模和橢圓函数的理論可說都是特殊情形．特别是，在大多数羣的情形下，代换的系数并不能用簡單而明顯的形式來表示．

14-8-2. 黎曼曲面

給定了 G 及 F，羣 G 的生成元素确立了基本区域 F 的边界点的对之間的对应关系[見 14-1-4 (iii)]．如果把等价边界点叠合起來，則得一 Riemann 曲面 S；这一 Riemann 曲面可具有边界点，对应于 F 边界上 G 的代换的不变点．这一 Riemann 曲面的格也就是**基本区域 F 的格**．(見 Ford, 1929, p. 238)．

S 上的單值解析函数对应于 G 的自守函数，从而使一个具有

已知基本区域的已知羣的自守函数的構作等价于 Riemann 曲面上(不一定是开的)單值解析函数的構作. 这一方法的概要可參看 Hurwitz 及 Courant (1925). 單值化問題(見 14–9 節)在自守函数理論發展方面有着重要的意义.

在特殊情况下,構作可進行得很明顯. 最簡單的例子就是 Riemann-Schwarz 三角形函数. 关于这些函数以及自守函数的反函数所滿足的微分方程的有关定理,可參看 14–10 節.

14–8–3. 自同構型 普英卡亞 θ 級数

Poincaré, 及他以后的 Ritter (1892, 1894) 与 Fricke (Fricke & Klein, 1912) 用 Weierstrass 構作橢圓函数的类似方法創立了自守函数的理論.

設 G 为对应代換的間断羣,如 14–2 節所述,并設 F 为 G 的一个基本区域.

設 s 为一常数,对于每一个 $r=0,1,2,\cdots$, 設 $v(\sigma_r)$ 为一实数或复数,它的絕对值等于 1 [因此 $v(\sigma_r)$ 是 G 上的一个函数,对应于复平面上的單位圓]. 应用 14–2 節的記法和定义,如果一个函数 $\psi(z)$ 滿足下列条件,則称 $\psi(z)$ 为类 $\{G,-s,v\}$ 的**自同構型**.

(i) $\psi(z)$ 在 F 上除了有限数的点为可能例外之外,解析而單值.

(ii) 如果 $\psi(z)$ 在 F 的 z_0 上解析,則在 D_0 之内,可解析开拓至 $z_r=\sigma_r(z_0)$, 所有可能的解析开拓(在 D_0 之内)都導致同一值 $\psi(z_r)$, 且

$$(1)\qquad \psi(z_r)=v(\sigma_r)(c_rz_0+d_r)^s\psi(z_0).$$

(iii) 在奇点的隣域上, $\psi(z)$ 可用 14–2(3) 的形式來表示.

(iv) $\psi(z)$ 不为一常数.

函数 $v(\sigma_r)$ 称为**乘数系統**,从(1)可知 v 是 G 上的乘性函数,

即

(2) $v(\sigma_r \sigma_{r'}) = v(\sigma_r)\, v(\sigma_{r'})$.

条件 $|v(\sigma_r)| = 1$ 是習慣上的假設．滿足 (1) 的自同構型称为是 $-s$ 次的．一个自守函数，如果以 $v(\sigma_r) = 1$ 作为其乘数系統，則是一零次自同構型．屬于模羣的一个子羣的自同構型也称为模形式．

自守函数的構作可簡化为自同構型的構作．設 $\psi_1(z)$ 及 $\psi_2(z)$ 分別为类 $\{G, -s, v_1\}$ 及 $\{G, -s_2, v_2\}$ 的自同構型，如

$$[v_1(\sigma_r)]^{s_1}[v_2(\sigma_r)]^{s_2} = 1, \qquad r = 0, 1, 2, \cdots,$$

則

$$\phi(z) = [\psi_1(z)]^{s_1}[\psi_2(z)]^{s_2}$$

或者是一常数，或者就是 G 的一个自守函数．

可以証明，每一个自同構型可用 Poincaré θ 級数來表示．我們將在 $z=\infty$ 不是 G 的一个聚点的假設下來作出这样的級数．級数的形式如下：

(3) $$\theta(z; G) = \sum_{r=0}^{\infty} [v(\sigma_r)]^{-1}(c_r z + d_r)^{-2l} H(z_r),$$

式中 $z_r, v(\sigma_r), c_r, d_r$ 的意义同 14-2 節及本節，l 是一 $\geqslant 2$ 的整数，$H(z)$ 是 z 的有理函数，在 G 的所有聚点上解析．無窮級数在 F 的每一閉子集（$H(z)$ 在其上解析）上一致而絕对收斂，应用公式(2)及关系式

$$\sigma_r(z_{r'}) = \sigma_r[\sigma_{r'}(z)] = \sigma_{r''}(z) = z_{r''}$$

可以証明 Poincaré θ 級数 (3) 就表示类 $\{G, -2l, v\}$ 的一个自同構型．

用 θ 級数來構作自同構型时，在某些情況下，特别是，在 G 是一具有極限圓的羣的情況下將会遇到困难，这个困难是由于这时 θ 級数所表示的函数恆等于零．在具有極点的自守函数的情形下，这一困难可以用構作在 F 上具有單極的 θ 級数來克服；这样的級

数在 F 上肯定不恒等于零. 另一方面,可以有必要來作出在 F 上解析而在 F 的抛物尖点上等于零的自同構型. 在这种情况下 $H(z)$ 在 F 上解析,而常会有級数(3)恆等于零. 这一种情况造成了 Poincaré 在級数(3)的理論中所須克服的最大困难.

Petersson(1940)提出了新的基礎來研究自同構型及 Poincaré θ 級数,他的方法以自同構型的度量化为根据. 設 G 为包含抛物代换的第一类 Fuchs 羣. 以实軸作为極限圓,代换的系数 a_r, b_r, c_r, d_r 都可取为实数. Petersson 命 $z=x+iy$, 并定义二个型的标積如下.

$$(4)\qquad (\psi_1, \psi_2)=\iint_F \psi_1(z)\overline{\psi_2(z)}y^{s-2}\,dx\,dy \qquad s>2,$$

一划表示共軛复数. Petersson 应用羣 G 下双曲度量的不变性,算出了(4)式,其中 ψ_1 是一自同構型,在 F 上解析,在 F 的所有抛物尖点上等于零("Spitzenform"), ψ_2 則表为 Poincaré θ 級数. 所得的公式可用以标誌 θ 級数的特征,并可用以証明这些級数理論中的基本定理. 設 G 为模羣的同余子羣,則理論在 $s=2$, $v(\sigma_r)=1$ 的情况下正确. 至于这一方法的推廣及应用,可参看 Petersson (1941, 1944, 1949).

关于只包含双曲代换的第一类 Fuchs 羣, Dalzell (1932, 1944, 1949 a, 1949 b)曾为 Poincaré θ 級数及有关函数導出了一个新的方法.

在很多情形下, Poincaré θ 級数的理論可用类似于韋尔司特拉斯 σ 及 ζ 函数的函数理論來补充(θ 級数类似于 $\wp$ 函数). 見 Ford (1929), 14–10–2 節中所列的参考文献, Ritter (1892), Stahl (1888), Dalzell (1932).

在不具有極限圓的羣的情形下, Poincaré θ 級数在 $l=1$ 及乘数系統 $v(\sigma_r)=1$ 时可以絕对收斂(見 14–10–2 節).

14.9. 單值化

設 G 为一第一类 Fuchs 羣，使基本区域 F 的閉包包含于極限圓的內部(如極限圓为实軸，則把上半平面定义为它的內部)．設 G 的所有代換(恆等代換 σ_0 为例外)都是双曲型的．从 14-7-2 節可知 G 的任何二个自守函数 $\phi_1(z)$ 及 $\phi_2(z)$ 都是代数相关的，也就是說，在 F 上恆满足关系

(1)　$P(\phi_1(z), \phi_2(z)) = 0,$

这里 $P(u, v)$ 为一多項式．这就是說变量 u, v 满足如下关系

(2)　$P(u, v) = 0,$

因而互为代数函数，可用一任意变量 z 的單值函数来表达如下

(3)　$u = \phi_1(z), v = \phi_2(z).$

这一任意变量 z 就称为代数关系 (2) 的單值化变量．或者，可把(2)作为一代数曲綫的定义式，而把(3)作为該曲綫的參数表示式，用單值函数表示．重要的是每一代数关系都可以这样單值化，而自守函数則是需要应用的函数中最一般的函数(还可參看 13-2 節)．这一結果可以詳細說明如下．

設 $P(u, v)$ 为二变数 u 及 v 的不可約多項式(卽，不能分解为几个多項式相乘積的多項式)，并設变数 u 及 v 可以代数关系(2)联系．則必存在复变数 z 的二个函数 $\phi_1(z)$ 及 $\phi_2(z)$，及 z 平面上的一个区域 F^*，具有如下性質：对于每一对满足(2)的复数 u 及 v，在 F^* 上存在一 z，使得 $u = \phi_1(z)$, $v = \phi_2(z)$，除了有限数的对(u, v)之外，这一 z 在 F^* 上是唯一确定的．而且，函数 $\phi_1(z)$ 及 $\phi_2(z)$ 可以选擇得使 (i) $\phi_1(z)$ 及 $\phi_2(z)$ 都是有理函数，F^* 是整个 z 平面，或使 (ii) $\phi_1(z)$ 及 $\phi_2(z)$ 是具有一对公共周期的橢圓函数，F^* 是这些函数的周期平行四边形(这一平行四边形只有一个頂点及二条边是 F^* 的部分)，或使 (iii) $\phi_1(z)$ 及 $\phi_2(z)$ 都是第一类 Fuchs 羣的自守函数，这一羣的所有代換(除 σ_0 以外)都

是双曲型的，F^* 則是这一羣的一个基本区域.

关于單值化的理論及歷史可参看 Hurwitz 及 Courant (1925, 第 3 部分，第 9 章).

14-10. 特殊自守函数

特殊自守函数在 14-3 及 14-6-3 節中也已有所討論.

14-10-1. 黎曼-許瓦茲三角形函数

在某些情况下，微分方程 14-7(5) 可化为超比方程 2-1(1). 所得的自守函数具有一極限圓. 这些自守函数称为 Riemann-Schwarz 三角形函数，参看 2-7-2 節，Klein 及 Fricke (1890-1892), Ford (1929, 114 節).

为了作出这样的三角形函数的羣的基本区域，并求出羣的本身起見，設 C_1, C_2, C_3 为三个圓，并設 C_0 为正交于 C_1, C_2, C_3 的圓. 当 C_1, C_2, C_3 的圓心都在实軸上时，($C_i, i=1, 2, 3$ 中有一个或几个可以为垂直于实軸的直綫，这样一条直綫的圓心为实軸的無窮远点)，可把 C_0 作为实軸. 設 Δ 为一三角形，由 C_1, C_2, C_3 的弧 A_1, A_2, A_3 所圍成；假設 Δ 在上半平面. 命 n_1, n_2, n_3 为三个正整数，Δ 的内角为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$，这里

$$(1) \qquad \alpha_i=\frac{\pi}{2n_i}, \qquad i=1, 2, 3.$$

假定

$$(2) \qquad \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3<\pi.$$

零角(或無限整数 n)是可許的. 角及頂点的計数如下：α_1 是 A_2 及 A_3 的夾角，余类推，V_1 是 A_2 及 A_3 的交点，余类推. 設 Δ' 为圓 C_3 上經 Δ 的反演而得的三角形. 点 V_1 及 V_2 也是 Δ' 的頂点；設 Δ' 另外一个頂点为 V_4. 取閉区域 $\Delta+\Delta'$ 作为 14-1-4 節的区域 F^*. 顯然，F^* 能滿足 14-1-4 節的条件 (i)，現在我們要作出一

个羣 G，使条件 (ii)-(iv) 也得到滿足．

存在有一个唯一的代换 σ_1，具有实系数，可將 V_1 映成自身，將 V_3 映成 V_4；同样有一类似的代换 σ_2 可將 V_2 映成自身，而將 V_3 映成 V_4．顯然，σ_1 將 A_2 映成 A_2'，σ_2 將 A_1 映成 A_1'．弧 A_1, A_1', A_2, A_2' 圍成 F^*，14-1-4 節的条件 (iii) 得到滿足．由 σ_1 及 σ_2 所生成的羣顯然滿足条件 (ii) 及 (iv)．設 F^* 中移去 V_4 及 A_1', A_2' 的內部后所成的区域为 F．則 G 就是第一类 Fuchs 羣，它的極限圓是实軸，而 F 就是 G 的基本区域．

羣 G 具有一自守函数 $\phi_0(z)$，其反函数为一 Schwarz 函数（見 2-7-2 節），可表示为二个超比函数之商．函数 $\phi_0(z)$ 在 F 上取每一个值恰巧一次，而 G 的每一自守函数必是 $\phi_0(z)$ 的有理函数．这种函数的簡單例子如 14-6-2 節的絕对不变式，或模羣的子羣的对应自守函数（見 14-6-3 節）．如

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2},\quad \alpha_2 = 0,\quad \alpha_3 = \frac{\pi}{3} \tag{3}$$

則 G 就是模羣 M，并可令 $\phi_0(z) = J(z)$；如

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0 \tag{4}$$

則 G 就是 λ-羣 M_2，并可令 $\phi_0(z) = k^2(z) = \lambda(z)$．

E. T. Whittaker (1899, 1902) 曾研究过另一类自守函数，这一类函数中的每一个都是一簡單自守函数的有理函数．可參看 Ford (1929, 96 節)．

14-10-2. 貝沙特自守函数

設 C_μ, C_μ'，$\mu = 1, \cdots m$ 是 $2m$ 个圓，并設任何二圓都不具有公共点，而且沒有一个圓分隔另外二个圓．这些假設說明在这些圓中間至多不过有一条直綫，而如果有一条直綫，所有其他的圓都在直綫的一边，則以这一条直綫为界而不包含圓的半平面就可以作为是它的內部．

設 $r_1, \cdots, r_m$ 为 m 个双曲或斜駛代換，使得 r_μ 將 C_μ 的内部映成 C'_μ 的外部，幷設 G 为 $r_1, \cdots, r_m$ 所生成的羣．所有圓的外部的平面部分可以取为基本区域 F．羣 G 沒有主圓．如 $m>1$，則 G 具有無窮多个極限点；如將这些点移去，則 z-平面的其余部分就是一連通集．

G 的自守函数可以用 Poincaré θ 級数構作，在这种情况下，-2 次的級数絕对收斂．G 的自守函数的理論曾由 Burnside (1891, 1892) 創立，他將他的結果应用于 Laplace 方程的边值問題，还可参看 Riemann (1876)，关于类似的羣及其自守函数，見 Schottky (1887)．

14·11. 希耳伯模羣

模和自守函数的理論曾以几种方法推廣至多变数函数．最初的結果是 Picard (1882) 提出的．在本節中，我們將扼要地提出 Hilbert 所首創的見解，到下一節中，將說明 Siegel 所作的研究．关于多变数自守函数的一般理論还可参看 Hurwitz (1905), Fubini (1908, 第三章), Sugawara (1940 a, b), Hua (1946)．

設 R 为有理数体，K 为 R 的有限实代数擴張，$K_2, \cdots, K_n$ 为 K_1 的共軛体，幷設所有的 $K_\rho, \rho=1, \cdots, n$ 都是实数．对于 K_1 中的任一 $\alpha^{(1)}$，設 $\alpha^{(2)}, \cdots, \alpha^{(n)}$ 为共軛数，$\alpha^{(\rho)}$ 在 K_ρ 上，对于 β, γ, δ 亦用同样的記法．設 $z_\rho, \rho=1, \cdots, n$ 为 n 个复变数，幷設 S 为 n 复变数空間（这一空間具有 $2n$ 实数維度）中的区域 $\mathrm{Im}\, z_\rho>0$，$\rho=1, \cdots, n$．設 $\alpha^{(1)}, \beta^{(1)}, \gamma^{(1)}, \delta^{(1)}$ 为 K_1 中的任何代数整数，滿足条件

(1) $\qquad \alpha^{(1)}\delta^{(1)}-\gamma^{(1)}\beta^{(1)}=1.$

更一般的來說，(1)式中的 1 可換为 K_1 的任一完全正的單位．这样，我們以下列方程定义模变換 σ．

$$(2)\qquad z_\rho'=\frac{\alpha^{(\rho)}z_\rho+\beta^{(\rho)}}{\gamma^{(\rho)}z_\rho+\delta^{(\rho)}}\qquad \rho=1,\cdots,n$$

由此可知 σ 將 S 映成自身．所有这样的 σ 的集合組成一羣 G，称为 K_1 的 Hilbert 模羣．

Blumenthal (1903, 1904) 曾証明，G 在 S 上有一基本区域，并且証明有屬于 G 的 n 个复变数的自守函数存在．如所加的是类似于 14–2 節条件的正規条件，則知任 $n+1$ 个自守函数都可用一代数关系相联，而且 $n+1$ 个自守函数可以选擇得使 G 的任一自守函数都是这 $n+1$ 个特殊函数的有理函数．

Maass (1941) 研究了 $K_1=R(\sqrt{5})$ 时的 Hilbert 模羣，其数体由 R 加 $\sqrt{5}$ 而成，因此 $n=2$．他把所得羣的模形式理論应用于数論中的問題（二次型）．关于 Hilbert 模羣及其自守函数的其他研究以及 Poincaré θ 級数 Petersson 理論在这一方面的拓廣，可参看 Maass (1940 a, b, 1942, 1948)．Maass (1940, a, b) 还研究了 Hilbert 模羣的推廣．

关于 Blumenthal 結果按 Hecke 單变数模形式理論方向的拓廣見 de Bruijn (1943)．

14–12. 西格耳函数

$\frac{1}{2}n(n+1)$, $n=1, 2, \cdots$, 复变数模函数的一个理論曾由 Siegel (1935, 1936, 1937, 1939) 創立，他以二次型的算術理論作为其 n 次模函数理論的出發点．当 $n=1$ 时，这一理論中有許多一般定理化为單变数模函数或模形式的熟知結果；但还有一些定理，即使在 $n=1$ 的情形下，仍導出新的結果．Siegel 理論最突出的一面就是在实 $n(n+1)$ 維空間的辛几何 (Symplectic geometry)（在耦对矩陣空間的正定矩陣几何）的应用，以代替二实維 Poincaré 半平面的非欧（双曲型）几何 (Siegel 1943)．这導出了自守函数的一种理論 (Siegel 1942, 1943)．这一理論的另外突出的一面

是証明中經常应用算術方法,代替了單变数的情形中常用的分析方法. 單变数自守函数的許多羣虽然另有一种主要的几何方法,但具有重要的算術性質,在 Siegel 理論中,算術方法是間断羣定义中的最重要內容.

在这一節中,我們將提出几条基礎定义,并介紹最簡單情形下的一些結果,对应于單变数情形下的模羣 M 及其絕对不变式 $J(z)$ 的理論. 关于 Siegel 理論的分枝及其很多重要的結果和应用,已超出了本節的范圍,不贅.

n 次模羣. 以整数为元素的矩陣称为整矩陣. 在这一節中,除非另有說明,凡大寫字母总代表 n 行与列的方陣. 矩陣 A 中,第 l 行与 k 列的元素記为 a_{lk}, 并用記法

(1) $\quad A=[a_{lk}] \qquad\qquad l, k=1, \cdots, n.$

n 行 n 列的零矩陣記为 N, 單位矩陣記为 I, 即

(2) $\quad N=[n_{lk}],\ I=[i_{lk}],\ n_{lk}=0,\ i_{lk}=\delta_{lk}, \qquad l, k=1, \cdots, n.$

A 的轉置陣以 A' 表示,因此 $a'_{lk}=a_{kl}$; A 的反陣为 A^{-1}, 因此 $AA^{-1}=A^{-1}A=I$.

設 A, B, C, D 为四 $n\times n$ 整数陣,并設

(3) $$M=\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

为分塊为 A, B, C, D 的 $2n\times 2n$ 矩陣,如 (3) 式. 我們定义一 $2n\times 2n$ 矩陣 J 如下

(4) $$J=\begin{bmatrix} N & I \\ -I & N \end{bmatrix}.$$

假設整数陣 $A, \cdots, D$ 的选擇能使

(5) $\quad M'JM=J.$

这一式成立的充要条件为

(6) $\quad AB'=BA',\ CD'=DC'$

(7) $\quad AD'-BC'=I.$

如 C 及 D 满足(6)的第二条件，即，如 CD' 为一对称矩陣，則称 C 及 D 組成对称对．設 C_1，D_1 及 C_2 与 C_2 为矩陣的二对称对；我們把这些矩陣称为共軛轉置陣，如果存在有矩陣 U，使得 U 及 U^{-1} 都是整数陣，且

(8)　$C_1=UC_2,\ D_1=UD_2.$

矩陣的所有对称对与一給定对共軛轉置者組成一类．設 C，D 为整数矩陣的一固定对称对，并設 U 过所有滿秩整数陣的集合．矩陣 C 及 D 称为互質，如果 $U^{-1}C$ 及 $U^{-1}D$ 为整数陣的必要条件是 U^{-1} 本身应为整数陣(这一条件常是充分的)．

所有满足(5)的 $2n\times 2n$ 整数陣 M 組成一羣．这一羣的二元素

(9)　$$\pm\begin{bmatrix} I & N \\ N & I \end{bmatrix}$$

組成一二階正規(或不变)子羣．所有 M 的羣相对于子羣(9)的商羣，即 M_1 及 $M_2=-M_1$ 恆等时满足(5)的所有 M 的羣，称为 n 次模羣，并記为 $\mathfrak{M}$．$\mathfrak{M}$ 的元素称为代换，每一代换由满足(6)，(7)的四整数陣 A, B, C, D 确定．矩陣 A, B, C, D 及 $-A$，$-B$，$-C$，$-D$ 确定同一代换．

設 Z 为一(复)对称矩陣．令

(10)　$z_{lk}=z_{kl}=x_{lk}+iy_{lk}$　　$l, k=1, \cdots, n$

对应地有

(11)　$Z=X+iY,$

其中 x_{lk} 及 y_{lk} 都是实数，X 及 Y 为实矩陣．我們把 z_{lk} 作为复变数，并以 Y 必須为正(即系数是 Y 的元素的二次型是恆正的)这一条件加以限制．矩陣 Z 可看作是空間的点，z_{lk} 或 x_{lk} 及 y_{lk} 就是其坐标：这一空間是 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 复維度的，或 $n(n+1)$ 实維度的．Y 为正矩陣的那一部分空間組成一子空間，以 $\mathfrak{H}$ 表示，可变矩陣 Z 將在 $\mathfrak{H}$ 上变化("正錐面")．

对于滿足 (6) 及 (7) 的任何整数陣 A, B, C, D, 卽对于 $\mathfrak{M}$ 的任一元素，我們定义代換

$$(12) \quad \sigma(Z) = (AZ+B)(CZ+D)^{-1}.$$

可以証明每一代换 (12) 定义了一个將 $\mathfrak{H}$ 映成自身的 $1-1$ 映射，这些映射的羣同态于 $\mathfrak{M}$. 同时还可以証明，作为 $\mathfrak{H}$ 映成自身的映射的羣的 $\mathfrak{M}$ 应具有一基域 $\mathfrak{F}$, 这一基域由有限数的解析超曲面圍成. 关于 $\mathfrak{M}$ 的生成元的集合，見 Hua 及 Reiner (1949).

模形式与模函数 設 L 为矩陣的互質对称对的所有类的集合. 从每一类中选擇一代表性的对 C, D, 組成廣义 Eisenstein 級数

$$(13) \quad \psi_r(Z) = \sum_L [\det(CZ+D)]^{-2r}.$$

可以証明，对于足夠大的正整数 r, (13)式中的級数对 $\mathfrak{H}$ 中的每一 Z 都絕对收斂，并在 $\mathfrak{H}$ 上定义了一个 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 个复变数 x_{ik} 的解析函数. 这样定义的函数 $\psi_r(Z)$ 就称为屬于 $\mathfrak{M}$ 的**模形式**.

如果 r, s 都是充分大的整数，則模形式 ψ_r 及 ψ_s 存在，且

$$(14) \quad \psi_r^s \psi_s^{-r}$$

是 $\mathfrak{M}$ 的一个**模函数**，具有基域 $\mathfrak{F}$. 可以証明，形式(14)的模函数共有 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 个，而且是代数上互相独立的，任何 $\frac{1}{2}n(n+1)+1$ 个这样的函数都可以用一个有理系数的代数关系相联系.

模形式(13)也可以展开为 θ 級数.

Poincaré θ 級数的 Petersson 理論(1940) 曾由 Maass (1951) 加以推廣. 在这一推廣中，Poincaré 半平面的双曲型矩陣应以正錐面 $\mathfrak{H}$ 的 Siegel 对称矩陣来代替.

二个恆等式 我們提出二个恆等式作为扼要介紹 Siegel 理論的結尾，这二恆等式都是適于 $n=2$ 的情形的.

第一个恆等式系由 Siegel (1937) 所提出，將模形式以二重 θ 級数表示. 設 L 为 2×2 矩陣的互質对称对的所有类的集合，在每一对中选擇一代表对 C, D, 設 L_2 为所有代表对的子集，使

$$CD' \equiv N \pmod 2$$

也就是說，CD' 的元素都是偶整数(如果这一条件为类的一个代表所满足，则必为任何其他代表所满足)．命

$$Z=\begin{bmatrix} u & v \\ v & w \end{bmatrix}=X+iY$$

其中 u, v, w 都是复变数，X, Y 为实矩陣，Y 是正的，并設 a, b 过所有整数．Siegel 恆等式为

(15) $\sum_{L_2}[\det(CZ+D)]^{-4}=\{\sum_{a,b}\exp[i\pi(ua^2+2vab+wb^2)]\}^8.$

第二个恆等式系 Witt (1941) 所提出，是二个 2 次模形式之間的恆等关系．应用(13)中的記法，Witt 恆等式可寫为

(16) $\psi_4(Z)=[\psi_2(Z)]^2$

Witt 恆等式与單一复变数 z 的 Eisenstein 級数理論中熟知公式

(17) $\sum_{a,b}(az+b)^{-8}=[\sum_{a,b}(az+b)^{-4}]^2$

相似，这里 a, b 过互質整数 a, b 的所有对，使 $a \geqslant 0$，而且当 $a=0$ 时 $b=1$．

参考文献

Baker. H. F., 1907: *Multiply periodic functions*, Cambridge.

Blumenthal, Otto, 1903: *Math. Ann.* 56, 509–543.

Blumenthal, Otto, 1904: *Math. Ann.* 58, 497–527.

de Bruijn, Nicolaas, 1943: *Over Modulaire Vormen van Meer Veranderlijken*, Thesis. Free University of Amsterdam.

Burnside, William, 1891: *Proc. London Math. Soc.* 22, 346–358.

Burnside, William, 1892: *Proc. London Math. Soc.* 23, 49–88.

Copson, E. T., 1935: *Theory of functions of a complex variable*, Oxford.

Dalzell, D. P., 1932: *Proc. London Math. Soc.* (2) 33, 539–558.

Dalzell, D. P., 1944.: *J. London Math. Soc.* 19, 135–137.

Dalzell, D. P., 1949a: *Proc. London Math. Soc.* (2) 51, 90–113.

Dalzell, D. P., 1949b: *Proc. London Math. Soc.* (2) 51, 114–131.

Ford, L. R., 1929: *Automorphic functions*, McGraw-Hill, second edition, 1951, Chelsea, New York.

Forsyth, A. R., 1900: *Theory of functions of a complex variable*, second edition, Cambridge.

Fricke, Robert, 1901–1921: *Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, vol.* 2, second part, B4, Leipzig.

Fricke, Robert, 1916, 1922: *Die elliptischen Funktionen und ihre Anwendungen*, 2 volumes, Leipzig.

Fricke, Robert, 1926: *Lehrbuch der Algebra*, vol. 2, Braunschweig.

Fricke, Robert, 1928: *Lehrbuch der Algedra*, vol. 3, Braunschweig.

Fricke, Robert and Felix Klein, 1897: *Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen*, vol. 1, B. G. Teubner, Leipzig.

Fricke, Robert and Felix Klein, 1912: *Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen*, vol. 2, B. G. Teubner, Leipzig.

Fubini, Guido, 1908: *Introduzione Nella Teoria Dei Gruppi Discontinui e Delle Funzioni Automorfe*, Pisa.

Fueter, Rudolf, 1924, 1927: *Vorlesungen über die singulären Moduln und die komplexe Multiplication der elliptischen Funktionen*, 2 volumes, B. G. Teubner, Leipzip.

Giraud, Georges, 1920: *Lecons sur les fonctions automorphes*, Gauthier-Villars, Paris.

Hardy, G. H., 1940: *Ramanujan. Twelve lectures on subjects suggested by his life and work*, Cambridge.

Hecke, Erich, 1912: *Math. Ann.* 71, 1–37.

Hecke, Erich, 1927: *Math. Ann.* 97, 210–242.

Hecke, Erich, 1935: *Danske Vid. Selsk. Mat.-Fys. Medd.* 13, No. 10, 16 pp.

Hecke, Erich, 1937: *Math. Ann.* 114, 1–28, 316–351.

Hecke, Erich, 1939: *Monatsh. Math. Phys.* 48, 75–83.

Hecke, Erich, 1940 a: *Vierteljschr. Naturforsch. Ges. Zürich*, 85, Beiblatt, 64–70.

Hecke, Erich, 1940 b: *Danske Vid. Selsk. Mat.-Fys. Medd.* 17, No. 12, 134 pp.

Hua, L. K., 1946: *Ann. of Math.* (2) 47, 167–191.

Hua, L. K. and Irving Reiner, 1949: *Trans. Amer. Math. Soc.* 65, 415–426.

Hurwitz, Adolf, 1905: *Math. Ann.* 61, 325.

Hurwitz, Adolf and Richard Courant, 1925: *Vorlesungen überallgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen*. Part. III, Chapter 9,

Springer, Berlin.

Klein, Felix, 1884: *Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade*, B. G., Teubner, Leipzig.

Klein, Felix and Robert Fricke, 1890-1892: *Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen*, 2 volumes, B. G. Teunber, Leipzig.

Krazer, Adolf and Wilhelm Wirtinger, 1901 1921: *Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*, vol. 2, second part, B7,

Maass, Hans, 1940 a: *Math. Ann.* 117, 538-578.

Maass, Hans, 1940 b: *S.-B. Heidelberger Akad. Wiss.* No. 2, 26 pp.

Maass, Hans, 1941: *Math, Ann.* 118, 65-84.

Maass, Hans, 1942: *Math. Ann.* 118, 518-543.

Maass, Hans, 1948: *Math. Z.* 51, 255-261.

Maass, Hans, 1951: *Math. Ann.* 123, 125-151.

Nehari, Zeev, 1947: *Amer. J. Math.* 69,. 70-86.

Petersson, Hans, 1939: *Math. Ann.* 116, 401-412.

Petersson, Hans, 1939: *Math. Ann.* 117, 39-64.

Petersson, Hans, 1940: *Math. Ann.* 117, 453-537.

Petersson, Hans, 1941: *Abh. Math. Sem. Hansischen Univ.* 14, 22-60.

Petersson, Hans, 1944: *Math. Z.* 49, 441-496.

Petersson, Hans, 1949: *Comment. Math. Helv.* 22, 168-199.

Picard, Émile, 1882: *Acta Math.* 1, 297-320.

Picard, Émile, 1885: *J. Math. Pures Appl.* (4) 1, 87.

Poincaré, Henri, 1916: *Oeuvres*, vol. 2, Gauthier-Villars, Paris.

Rademacher, Hans, 1940: *Bull. Amer. Math. Soc.* 46, 59-73.

Reid, L. W., 1910: *The elements of the theory of algebraic numbers*, MacMillan.

Riemann, Bernhard, 1876: *Gesammelte Mathematische Werke*, B. G. Teubner, Leipzig, pp. 413-416, also second edition, pp. 455-461.

Ritter, Ernst, 1893: *Math. Ann.* 41, 1-82.

Ritter, Ernst, 1894: *Math. Ann.* 45, 473-544.

Ritter, Ernst, 1894: *Math. Ann.* 46, 200-248.

Schlesinger, Ludwig, 1924: *Automorphe Funktionen*, B. G. Teubner, Berlin and Leipzig.

Schneider, Theodor, 1936: *Math. Ann.* 113, 1-13.

Schottky, Friedrich, 1887: *J. Reine Angew. Math.* 101, 227 257.

Siegel, C. L., 1935: *Ann. of Math.* 36, 527-606.

Siegel, C. L., 1936: *Ann. of Math.* 37, 230-263.

Siegel, C. L., 1937: *Ann. of Math.* 38, 212-291.

Siegel, C. L., 1939: *Math. Ann.* 116, 617-657.

Siegel, C. L., 1942: *Ann. of Math.* (2) 43, 613-616.

Siegel, C. L., 1943: *Amer. J. Math.* 65, 1-86.

Siegel, C. L., 1950: *Mat. Tidsskr. B*, 66-70.

Stahl, Hermann, 1888: *Math. Ann.* 34, 291-309.

Sugawara, Masao, 1940 a: *Ann. of Math.* (2) 41, 488-494.

Sugawara, Masao, 1940 b: *Proc. Imp. Acad. Tokyo.* 16, 367-372.

van der Waerden, B. L., 1949: *Modern algebra*, vol. 1, Fredrick Ungar, New York.

Whittaker, E. T., 1899: *Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A* 192, 1-32.

Whittaker, E. T., 1902: *Messenger Math.* 31, 145-148.

Witt, Ernst, 1941: *Abh. Math. Sem. Hansischen Univ.* 14, 323-337.

Zassenhaus, Hans, 1941: *Abh. Math. Sem. Hansischen Univ.* 14, 285-288.

Zuckerman, H. S., 1939: *Bull. Amer. Math. Soc.* 45, 917-919.

第十五章　拉美函数

15-1. 引言

在解某些曲綫坐标系的 Laplace 方程中，会得出 Lamé 函数．三維 Laplace 方程中的分离变数法在 Bôcher (1891) 的著作中有詳細的敍述，在近代 Levinson, Bogert, Redheffer (1949) 及 Moon 与 Spancer (1952 a, b, 1953) 的著作中也有詳尽的討論．关于比較一般的微分方程的分离变数法可参看 Eisenhart (1934)，其中也参考到早期的作者．

Strutt 的論文就 1932 年为止的 Lamé 函数理論，若干应用，以及廣泛的書目作了概括的敍述．关于这些函数的其它論述可参看 Whittaker 及 Watson (1927, 第 23 章) 及 Hobson (1931, 第 11 章)．

15-1-1. 共焦二次曲面坐标

設 $a>b>c>0$ 为固定的数，θ 为一参变数．方程

$$(1)\qquad \frac{x^2}{a^2+\theta}+\frac{y^2}{b^2+\theta}+\frac{z^2}{c^2+\theta}=1$$

代表的是一族共焦二次曲面，x, y, z 为笛卡尔直角坐标．方程(1)所代表的二次曲面

在 $-c^2<\theta$ 时是一橢球面，

在 $-b^2<\theta<-c^2$ 时是單叶双曲面，

在 $-a^2<\theta<-b^2$ 时是双叶双曲面，

在 $\theta<-a^2$ 时是一虛二次曲面．

如 $\theta=-a^2, -b^2, -c^2$ 則得退化的二次曲面．

由于 (1) 是 θ 的三次方程，故当 $xyz\neq0$ 时（这就排除了退化

二次曲面的平面)，共焦族中有三个二次曲面通过每一点 (x, y, z). 当 θ 变化时，方程(1)左边的符号表明三个根中恰巧有一个位于每一区間 $(-c^2, \infty)$, $(-b^2, -c^2)$, $(-a^2, -b^2)$ 上，表示通过每一点(不在一坐标平面上)的有共焦族中的一橢球面，一單叶双曲面及一双叶双曲面.

对于非零的已知 x, y, z, 設(1)的三个根为 λ, μ, ν, 并設

$$(2)\qquad \lambda > -c^2 > \mu > -b^2 > \nu > -a^2.$$

在 Laplace 方程

$$(3)\qquad \Delta W = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = 0$$

中，以 λ, μ, ν 作为曲面坐标，則方程(3)变换为这一曲面坐标时变为

$$(4)\qquad \frac{4f(\lambda)}{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)} \frac{\partial}{\partial\lambda}\left[f(\lambda)\frac{\partial W}{\partial\lambda}\right] + \frac{4f(\mu)}{(\mu-\lambda)(\mu-\nu)} \frac{\partial}{\partial\mu}\left[f(\mu)\frac{\partial W}{\partial\mu}\right]$$
$$+ \frac{4f(\nu)}{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)} \frac{\partial}{\partial\nu}\left[f(\nu)\frac{\partial W}{\partial\nu}\right] = 0,$$

式中

$$(5)\qquad f(\theta) = [(a^2+\theta)(b^2+\theta)(c^2+\theta)]^{1/2}.$$

由于 λ, μ, ν 只依賴于 x^2, y^2, z^2, 因此对八个点 $(\pm x, \pm y, \pm z)$ 都相同. 为了求得笛卡尔坐标及曲面坐标間的一一对应关系，可引入單值化变数，將 λ, μ, ν 因而是 x, y, z 用三个新变数 α, β, γ 的 Jacobi 橢圓函数來表示. 令

$$(6)\qquad k^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}, \quad k'^2 = \frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}, \qquad 0 < k, k' < 1.$$

可知 k 就是橢圓函数的模. 于是令

$$(7)\qquad \lambda = -(a \operatorname{cn}\alpha)^2 - (b \operatorname{sn}\alpha)^2,$$
$$\mu = -(a \operatorname{cn}\beta)^2 - (b \operatorname{sn}\beta)^2,$$
$$\nu = -(a \operatorname{cn}\gamma)^2 - (b \operatorname{sn}\gamma)^2.$$

用新的曲面坐标來表示，有

$$(8)\qquad x=k^2(a^2-c^2)^{1/2}\,\alpha\,\mathrm{sn}\,\beta\,\mathrm{sn}\,\gamma,$$

$$y=-\frac{k^2}{k'}(a^2-c^2)^{1/2}\,\mathrm{cn}\,\alpha\,\mathrm{cn}\,\beta\,\mathrm{cn}\,\gamma,$$

$$z=\frac{i}{k'}(a^2-c^2)^{1/2}\,\mathrm{dn}\,\alpha\,\mathrm{dn}\,\beta\,\mathrm{dn}\,\gamma,$$

Laplace 方程 (3) 变为

$$(9)\qquad \frac{a^2-c^2}{(a^2-b^2)^2}\frac{1}{[(\mathrm{sn}\alpha)^2-(\mathrm{sn}\beta)^2][(\mathrm{sn}\beta)^2-(\mathrm{sn}\gamma)^2][(\mathrm{sn}\gamma)^2-(\mathrm{sn}\alpha)^2]}$$

$$\times\left\{[(\mathrm{sn}\,\gamma)^2-(\mathrm{sn}\,\beta)^2]\frac{\partial^2W}{\partial\alpha^2}+[(\mathrm{sn}\,\alpha)^2-(\mathrm{sn}\,\gamma)^2]\frac{\partial^2W}{\partial\beta^2}\right.$$

$$\left.+[(\mathrm{sn}\,\beta)^2-(\mathrm{sn}\,\alpha)^2]\frac{\partial^2W}{\partial\gamma^2}\right\}=0.$$

如令 α 在 $i\mathbf{K}'$ 及 $\mathbf{K}+i\mathbf{K}'$ 之間变化，β 在 $\mathbf{K}$ 及 $\mathbf{K}+2i\mathbf{K}'$ 之間，γ 在 0 与 $4K$ 之間变化，則应用 13–18 節的公式及圖可以証明不等式(2)是滿足的，而且(8)式表示的是笛卡尔坐标 x, y, z 及曲面坐标 α, β, γ 之間的一一对应关系，我們把这种曲面坐标称为**椭面坐标，或共焦二次曲面坐标**.

α, β, γ 变化所在的区間的端点具有特别重要的意义．它們表示了 ∞ 及新系的退化二次曲面，可列举如下：

$\alpha=i\mathbf{K}'$ 無窮大；

$\alpha=\mathbf{K}+i\mathbf{K}'$ 复盖(二次)焦橢圓面積的退化橢球面；

$\beta=\mathbf{K}$ 及 $\beta=\mathbf{K}+2i\mathbf{K}'$ 复盖焦双曲綫的二枝"間"面積(二次)的退化双曲面的二半部；

$\beta=\mathbf{K}+i\mathbf{K}'$ 复盖(二次) x, y-平面上焦橢圓"外部"面積的退化双曲面；

$\gamma=0, \mathbf{K}, 2\mathbf{K}, 3\mathbf{K}, 4\mathbf{K}$ 复盖(二次)焦双曲綫"外部"面積的退化双叶双曲面的部分，$\gamma=0$ 及 $\gamma=4K$ 表示同一曲面.

退化曲面可作为分枝切割，过这些分枝切割的函数的連續性公設具有边界条件的特性.

应当注意，这里的 α 相当于球極坐标中的 r, β 相当于 θ, γ 相当于 ϕ.

除了"Jacobian"單值化变数外，有許多作者用"Weierstrassian"变数(参看 Whittaker 及 Watson, 1927, 23–31 節).

Laplace 方程 (9) 具有正規解

$$W = A(\alpha)\,B(\beta)\,C(\gamma). \tag{10}$$

代入 (9) 得

$$[(\operatorname{sn}\gamma)^2-(\operatorname{sn}\beta)^2]\frac{A''}{A}+[(\operatorname{sn}\alpha)^2-(\operatorname{sn}\gamma)^2]\frac{B''}{B}+[(\operatorname{sn}\beta)^2-(\operatorname{sn}\alpha)^2]\frac{C''}{C}=0. \tag{11}$$

由于这是 α, β, γ 的恆等式，故必有常数 h 及 l, 使

$$\frac{A''}{A}=l(\operatorname{sn}\alpha)^2-h,\quad \frac{B''}{B}=l(\operatorname{sn}\beta)^2-h,\quad \frac{C''}{C}=l(\operatorname{sn}\gamma)^2-h. \tag{12}$$

命 $l=k^2n(n+1)$, 可知 A, B, C 滿足如下具有適当变数的 Lamé 方程

$$\frac{d^2A(z)}{dz^2}+\{h-n(n+1)[k\operatorname{sn}(z,k)]^2\}A(z)=0. \tag{13}$$

設 (10) 表示 Laplace 方程的一个解，在一橢球面 $\alpha=\text{const.}$ 上連續而具有連續梯度．由于 $\gamma=0$ 及 $\gamma=4K$ 表示該橢球面上的同一曲綫，故知

$$C(0)=C(4\boldsymbol{K}),\quad \frac{\partial C}{\partial\gamma}(0)=\frac{\partial C}{\partial\gamma}(4\boldsymbol{K}). \tag{14}$$

因为 Lamé 方程中的系数都是 mod 4K 周期的，故知 $C(\gamma)$ 也須是 mod $4\boldsymbol{K}$ 周期的．如 $C(\gamma)$ 是 Lamé 方程的任一 mod $4\boldsymbol{K}$ 周期解，則 $C(2\boldsymbol{K}-\gamma)$ 及 $C(\gamma)\pm C(2\boldsymbol{K}-\gamma)$ 也如此，我們可把討論限于周期解，它是 $\gamma-\boldsymbol{K}$ 的偶函数或奇函数：在这种情况下，我們称我們的解为关于 $\boldsymbol{K}$ 偶，或关于 $\boldsymbol{K}$ 奇．

曲綫 $\beta=\boldsymbol{K}$ 及 $\beta=K+2iK'$ 都是橢面上的分枝切割；点 $(\boldsymbol{K},\gamma)$,

$(\mathbf{K}, 2\mathbf{K}-\gamma)$ 是叠合的．連續性条件为

$$(15)\quad B(\mathbf{K})\,C(\gamma)=B(\mathbf{K})\,C(2\mathbf{K}-\gamma),$$
$$\frac{\partial B}{\partial \beta}(\mathbf{K})\,C(\gamma)=-\frac{\partial B}{\partial \beta}(\mathbf{K})\,C(2\mathbf{K}-\gamma).$$

如 $C(\gamma)$ 是关于 $\mathbf{K}$ 的偶函数，則 $\partial B(\mathbf{K})/\partial\beta=0$，因此 $B(\beta)$ 也是关于 $\mathbf{K}$ 的偶函数；如 $C(\gamma)$ 是关于 $\mathbf{K}$ 的奇函数，則 $B(\mathbf{K})=0$，因此 $B(\beta)$ 也是关于 $\mathbf{K}$ 的奇函数．在 $\beta=\mathbf{K}+2i\mathbf{K}'$ 上情形相同，因此，如 $C(\gamma)$ 是关于 $\mathbf{K}$ 的偶（奇）函数，則 $B(\beta)$ 应同时是关于 $\mathbf{K}$ 及关于 $\mathbf{K}+2i\mathbf{K}'$ 的偶（奇）函数．在任一情形下，$B(\beta)$ 是一周期函数 mod $4i\mathbf{K}'$．此外，$B(\theta)$ 及 $C(\theta)$ 在 $\theta=\mathbf{K}$ 上具有同样的宇称，并滿足同一微分方程：由此可知，它們互为常数倍数．这样一来，就使我們要查問方程 (13) 是否有双周期解存在．后面將可看到，(15–5–2 節)，这样的解僅当 n 是一整数时存在，h 具有一列特征值之一．应当指出，在球極坐标或笛卡尔坐标系中，解的分析也得出 n 应为整数的結論．

$A(\alpha)$ 的选擇取决于所論橢球調和函数的类型．对于**內調和函数**來說，須要 (10) 在橢球面 $\alpha=$ const. 內部正則．但 $\alpha=\mathbf{K}+i\mathbf{K}'$ 是一分枝切割（焦橢圓），点 $(\mathbf{K}+i\mathbf{K}', \beta, \gamma)$ 与点 $(\mathbf{K}+i\mathbf{K}'; 2\mathbf{K}+2i\mathbf{K}'-\beta, \gamma)$ 叠合，故仍得前面一样的結論：$A(\theta)$ 及 $B(\theta)$ 在 $\mathbf{K}+i\mathbf{K}'$ 上应具有同样的宇称，因而互为常数倍数．就**外調和函数**來說，須要 (10) 在橢球面 $\alpha=$ const. 外部正則，特別是在無窮远处，$\alpha\to i\mathbf{K}'$，而 $A(\alpha)$ 則必須是 Lamé 方程在 $i\mathbf{K}'$ 上等于零的那一解．最后，对于在共焦族的二橢球面之間正則的橢球調和函数，可取这二解的綫性組合．

15–1–2. 共焦錐面坐标

下面我們介紹坐标 r, β, γ，它与笛卡尔坐标 x, y, z 及球極坐标 r, θ, ϕ 的关系如下：

(16) $x=r\sin\theta\cos\phi=kr\,\mathrm{sn}\,\beta\,\mathrm{sn}\,\gamma,$

$$y=r\sin\theta\sin\phi=i\frac{k}{k'}r\,\mathrm{cn}\,\beta\,\mathrm{cn}\,\gamma,$$

$$z=r\cos\theta=\frac{1}{k'}r\,\mathrm{dn}\,\beta\,\mathrm{dn}\,\gamma.$$

像在 15-1-1 節中一样, β 在 $\mathbf{K}$ 与 $\mathbf{K}+2i\mathbf{K}'$ 之間变化, γ 在 0 与 $4\mathbf{K}$ 之間变化, $r>0$. 坐标曲面是同心球面 $r=\text{const.}$, 及共焦錐面

(17) $$\frac{x^2}{a^2+\theta}+\frac{y^2}{b^2+\theta}+\frac{z^2}{c^2+\theta}=0$$

其中 θ 为 (7) 式的 μ 或 ν, k 由 (6) 确定. 这些坐标称为球錐坐标, 見 Hobson 1892 及 1931, 第 11 章.

Laplace 方程用这种坐标表示时为

(18) $$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial W}{\partial r}\right)-\frac{1}{k^2r^2[(\mathrm{sn}\,\beta)^2-(\mathrm{sn}\,\gamma)^2]}\left(\frac{\partial^2W}{\partial\beta^2}-\frac{\partial^2W}{\partial\gamma^2}\right)=0,$$

正規解形为

(19) $$W=R(r)\,B(\beta)\,C(\gamma),$$

并可導出下面的微分方程

(20) $$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)=n(n+1),$$

至于 B 及 C 的方程与 (12) 中一样, 以 $l=k^2n(n+1)$.

如果 (19) 式所表示的函数应在球面 $r=\text{const.}$ 上連續而具有連續的梯度, 应用 15-1-1 節的同样分析可知 $B(\theta)=C(\theta)$ 必須是 Lamé 方程的一个双周期解, 因此 n 为一整数, h 取特征值之一. 另外, (16) 式給出了球極坐标与球錐坐标之間的关系, 从而可以導出球面調和函数与橢球面調和函数之間的关系, 因此可知 n 应为整数, 而 h 恰有 $2n+1$ 特征值.

如果 (19) 所表示的函数应在錐面 $\beta=\text{const.}$ 內部正則, 此处的 β 在 $\mathbf{K}$ 与 $\mathbf{K}+i\mathbf{K}'$ 之間变化, 則情形就完全不同. 如 (19) 在整半錐面 $\beta=\text{const.}$ 內部正則, 則必有 $n=-\frac{1}{2}+ip$, 此处 p 是任

意的实数，如(19)在球 $r=r_1$ 及 $r=r_2$ 之間的錐面內部正則，而在这些球面上等于零，則必有 $n=-\frac{1}{2}+ip$，此处 p 是超越方程 $\sin[p\log(r_1/r_2)]=0$ 的一个根．在任一情形下，n 都是复数，而 $\mathrm{Re}\, n=-\frac{1}{2}$．由于 $\gamma=0$ 及 $\gamma=4K$ 是同一曲面，$C(\gamma)$ 必須是 mod $4K$ 周期的，h 必取特征値無窮序列中的一个値，过 $\beta=K$ 的連續条件使 $B(\theta)$ 及 $C(\theta)$ 在 K 上具有相同的宇称，因此应互为常数倍数，但此时所包含的函数不再是双周期的．

5-1-3. 迴轉共焦四次圓紋曲面坐标

在柱面坐标 ρ, ϕ, z 中，Laplace 方程变为

$$(21)\qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial W}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 W}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}=0.$$

现在引入子午面上的新坐标 u, v，命 $z=z(u,v)$，$\rho=\rho(u,v)$．Wangerin (1875) 曾确定过最一般的正交曲面坐标系 u, v，使 Laplace 方程成为可分离的，也就是說，具有形如下式的正規解

$$(22)\qquad W=w(u,v)\,U(u)\,V(v)\,\Phi(\phi),$$

其中 $w(u,v)$ 是一固定函数，U, V, Φ 都是常微分方程的解．Wangerin 的討論曾由 Snow (1952) 及 R. Lagrange (1939, 1944) 重行提出．下面將先簡單地介紹一下他們的討論，而后詳細說明 Wangerin 的曲面坐标系以及他們提出的边値問題．

Wangerin 証明了下面的結果．設 u, v 为正交坐标，并設 Laplace 方程具有形如(22)式的解，則 $w=\rho^{-\frac{1}{2}}$，坐标 u, v 可以取得使 z, ρ 平面在 u, v 平面上的映射是保形的．因此命

$$(23)\qquad z+i\rho=f(u+iv),$$

其中 f 为一解析函数，又在 Laplace 方程(21)中命

$$(24)\qquad W=\rho^{-\frac{1}{2}}\Psi(u,v)\,e^{\pm im\phi}=\rho^{-\frac{1}{2}}U(u)\,V(v)\,e^{\pm im\phi}.$$

Ψ 所满足的偏微分方程为

$$(25)\qquad \frac{\partial^2\Psi}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial v^2}-(m^2-\tfrac{1}{4})\,F(u,v)\,\Psi=0,$$

其中

$$(26)\qquad F(u,v)=\frac{|f'(u+iv)|^2}{[\operatorname{Im} f(u+iv)]^2}=\frac{|f'|^2}{\rho^2}.$$

如果 F 的形式为 $F(u,v)=F_1(u)+F_2(v)$，則解的形式將为 $U(u)V(v)$，U 及 V 所滿足的常微分方程为

$$\frac{d^2U}{du^2}+[h-(m^2-\tfrac{1}{4})\,F_1(u)]\,U=0,$$

$$\frac{d^2V}{dv^2}-[h+(m^2-\tfrac{1}{4})\,F_2(v)]\,V=0.$$

于是証明了：$F(u,v)=F_1(u)+F_2(v)$的充要条件是 f 应滿足常微分方程

$$f'^2=\alpha_0+\alpha_1 f+\alpha_2 f^2+\alpha_3 f^3+\alpha_4 f^4=P_4(f),$$

其中 $\alpha_0,\cdots,\alpha_4$ 都是实常数。由此可知，f 或者是初等函数，或者是橢圓函数．不僅如此，f 的微分方程的形式在 f 换为$(Af+B)/(Cf+D)$时并不改变，这里 A, B, C, D 都是实常数，且 $AD-BC\neq 0$，因此可用这樣一个变换把方程化成范式．

当方程可用 13 5 節所述的步驟簡化成范式的时候，設 P_4 具有四个不同的零点．根据这四个零点的全部是实数，全部是虛数或二个是实数二个是虛数的不同而可有三种情况．在这三种情形中，f 的标准形式是

$$\operatorname{sn}(u+iv,k),\quad i\operatorname{sn}(u+iv,k),\quad \operatorname{cn}(u+iv,k).$$

現在我們將分开來討論这三种情形．一划代表共軛复数，并应用下面的簡号

$$(27)\qquad \begin{aligned} &s=\operatorname{sn}(u+iv,k),\ s_1=\operatorname{sn}(u,k),\ s_2=\operatorname{sn}(iv,k),\ s_2'=\operatorname{sn}(v,k'),\\ &c=\operatorname{cn}(u+iv,k),\ c_1=\operatorname{cn}(u,k),\ c_2=\operatorname{cn}(iv,k),\ c_2'=\operatorname{cn}(v,k'),\\ &d=\operatorname{dn}(u+iv,k),\ d_1=\operatorname{dn}(u,k),\ d_2=\operatorname{dn}(iv,k),\ d_2'=\operatorname{dn}(v,k'),\end{aligned}$$

$$F(u, v)=\frac{|f'(u+iv)|^2}{[\operatorname{Im} f(u+iv)]^2}, \qquad n=\pm m-\tfrac{1}{2}.$$

下面討論的目的是要証明在任一情况下，$F(u, v)$ 將取如下的形式

$$[a \operatorname{sn}(bu+c, a/b)]^2+[a_1 \operatorname{sn}(b_1 v+c_1, a_1/b_1)]^2.$$

因此 (25) 式变为

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 \Psi}{\partial v^2}-n(n+1)\{[a \operatorname{sn}(bu+c, a/b)]^2$$
$$+[a_1 \operatorname{sn}(b_1 v+c_1, a_1/b_1)]^2\} \Psi=0.$$

对于正規的解，$\Psi=U(u) V(v)$，而 U 及 V 所满足的方程很容易化为 Lamé 方程，后者中的变数分别为 $bu+c$ 及 $b_1 v+c_1$. 因而，我們現在应研究应加于 U 及 V 的边界条件。

这一討論中所用的坐标 u, v 將从一般理論中很自然地產生. 在一給定的問題中，它們并不一定是最適当的坐标，在 15-8 節將会看到，橢圓函数的变換理論可用以把它变換为新的更適当的坐标.

第一种情形：軸上有四个实焦点

命

$$(28) \qquad z+i\rho=\frac{As+B}{Cs+D}, \quad A, B, C, D \text{ 都是实数}, \ AD-BC \neq 0.$$

应用公式 13-17(16)、13-23(13) 及 13-18 節的表 7，通过直接計算，可知

$$(29) \quad F(u, v)=-\frac{4 c d \bar{c} \bar{d}}{(s-\bar{s})^2}=\frac{k'^4 s_1^2}{c_1^2 d_1^2}+\frac{d_2'^2}{s_2'^2 c_2'^2}$$
$$=-\left\{(1-k) \operatorname{sn}\left[i(1+k) u, \frac{1-k}{1+k}\right]\right\}^2$$
$$+\left\{(1-k) \operatorname{sn}\left[(1+k)(v-i \mathbf{K}), \frac{1-k}{1+k}\right]\right\}^2.$$

为了作進一步討論，在(28)式中令 $A=D=0$, $B=C=0$. 映射 $z+i\rho=\mathrm{sn}(u+iv)$ 已在 13–25 節中叙述过. 从 13–25 節的圖中可以看出半平面 $\rho>0$ 映成 (u, v)平面的矩形，頂点为$(\pm K, 0)$ 及 $(\pm K, iK')$. 因而 $-K\leqslant u\leqslant K$, $0\leqslant v\leqslant K'$. 在 z, ρ 平面上的曲綫 $u=\mathrm{const.}$ 及 $v=\mathrm{const.}$ 都是共焦重圓点四次綫，焦点在 $z=\pm 1$, $\pm k^{-1}$, $\rho=0$. 注意，在 $u=\pm K$ 或 $v=0, K'$ 时 F 变为無窮大，因此，u 及 v 的区間的端点对应于 U 及 V 的常微分方程的奇点.

对于在曲面 $u=\mathrm{const.}$ 內部(或外部)正則的势，$\rho^{-1/2}V(v)$ 应在二端点 $v=0, K'$ 上保持有限，下面將会看到，这确定了 h 的某些特徵值以及应用的解 $V(v)$. 对于在曲面 $u=c<0$ 外部(內部)，或曲面 $u=c>0$ 內部(外部)正則的势，$U(K)$ $[U(-K)]$ 必須有限，这确定了 U 的选擇. 对于在曲面 $v=\mathrm{const.}$ 內部或外部正則的势，也成立类似的叙述.

第二种情形：軸上沒有实焦点

此处

$$(30)\quad z+i\rho=\frac{Ais+B}{Cis+D},\ A, B, C, D \text{ 实数},\ AD-BC\neq 0.$$

$$(31)\quad F(u,v)=\frac{4c\bar{c}d\bar{d}}{(s+\bar{s})^2}=\frac{c_1^2d_1^2}{s_1^2}-\frac{k'^4s_2^2}{c_2^2d_2^2}$$
$$=-\left\{(1-k)\,\mathrm{sn}\left[i(1+k)(u-K),\ \frac{1-k}{1+k}\right]\right\}^2$$
$$+\left\{(1-k)\,\mathrm{sn}\left[(1+k)v,\ \frac{1-k}{1+k}\right]\right\}^2.$$

为了進一步討論，仍令 $A=D=1$, $B=C=0$. 四分之一平面 $z<0, \rho>0$ 映成 u, v 平面上的矩形，頂点在$(0, 0)$, $(K, 0)$, (K, K'), $(0, K')$，如 13–25 節的圖所示. 为了完成映射，可在(z, ρ)平面上反映于 $z=0$, 在 u, v 平面上反映于 $v=0$ 或 $u=K$. z, ρ 平面上的曲綫 $u=\mathrm{const.}$, $v=\mathrm{const.}$ 都是共焦重圓点四次綫，具有实焦

点在 $z=0$, $\rho=1$, k^{-1}.

对于在曲面 $u=\text{const.}$ 内部或外部正則的势，可將半平面 $\rho>0$ 映成 u, v 平面的矩形，其頂点为 $(0, \pm K')$, $(K, \pm K')$. $v=K'$ 及 $v=-K'$ 都是 $z=0$, $\rho>k^{-1}$ 的映像．根据 15-1-1 節中同样的論断，可知 $V(v)$ 必为相当微分方程的周期解，周期为 $2K'$. 这一条件可确定 h 的特征值以及对应的特征函数 $V(v)$. 对于在 $u=\text{const.}$ 内部正則的势，过 $u=K$ (即 $z=0, 1<\rho<k^{-1}$) 的連續性条件要求 K 上的 U 及 0 上的 V 具有同样的宇称；对于在 $u=\text{const.}$ 外部正則的势，U 应在 $u=0$ 上保持有限．这一情形曾由 Poole (1929, 1930) 詳加討論，他所用的映射稍有不同．

对于在曲面 $v=\text{const.}$ 内部或外部正則的势，可將半平面 $\rho>0$ 映成矩形，頂点为 $(0, 0)$, $(2K, 0)$, $(2K, K')$, $(0, K')$. 此处的 $\rho^{-1/2}U(u)$ 应在 $u=0$ 及 $u=2K$ 上同时保持有限，这一条件可确定 h 的特征值及特征函数 $U(u)$. 至于 $V(v)$ 則可由它在 0 上(对于在 $v=\text{const.}$ 内部正則的势)或在 K' 上(对于在 $v=\text{const.}$ 外部正則的势)的宇称來确定．

第三种情形：在軸上有二实焦点

此处

$$(32)\quad z+i\rho=\frac{Ac+B}{Cc+D},\quad A, B, C, D \text{ 都是实数},\ AD-BC\neq 0.$$

$$(33)\quad F(u, v)=-\frac{4sd\bar{s}\bar{d}}{(c-\bar{c})^2}=\frac{c_1^2}{s_1^2d_1^2}-\frac{c_2^2}{s_2^2d_2^2}$$

$$=\left\{(k-ik')\,\mathrm{sn}\left[(k+ik')(u+K), \frac{k-ik'}{k+ik'}\right]\right\}^2$$

$$-\left\{(k-ik')\,\mathrm{sn}\left[i(k+ik')(v-iK), \frac{k-ik}{k+ik}\right]\right\}^2.$$

在这种情形下，出現在 Lamé 方程中的橢圓函数的模不是一实分数而是模为 1 的复数，必須应用橢圓函数的变换理論(見 13-22 節

表 11) 將所有函数化为 0 与 1 之間的实数模. 命 $A=D=1$, $B=C=0$. z, ρ 平面上的曲綫 $u=\text{const.}$, $v=\text{const.}$ 都是共焦重圓点四次綫,焦点在 $z=\pm1$, $\rho=0$ 及 $z=0$, $\rho=k'/k$. 映射的其他細節可从 13-25 節的圖中看出.

对于在曲面 $u=\text{const.}$ 內部或外部正則的势,可將半平面 $\rho>0$ 映成 u, v 平面上的矩形,頂点为 $(0, -2K')$, $(K, -2K')$, $(K, 0)$, $(0,0)$. 根据 $\rho^{-1/2}V(v)$ 应在 $v=0$ 及 $v=-2K'$ 上同时保持有限的条件可确定 h 的特征值及特征函数 $V(v)$. 对于在 $u=\text{const.}$ 內部正則的势,在 $z=0$, $\rho<k'/k$ 上有一分枝切割,或 $u=K$, 过这一分枝切割的連續性可确定 U 在 K 上应与 V 在 $-K'$ 上有相同的宇称. 对于在 $u=\text{const.}$ 外部正則的势, $\rho^{-1/2}U$ 可按它在 $u=0$ 上应保持有限的条件來确定.

对于在曲面 $v=\text{const.}$ 內部或外部正則的势,可將半平面 $\rho>0$ 映成 u, v 平面上頂点在 $(0, -K')$, $(2K, -K')$, $(2K, 0)$, $(0,0)$ 的矩形. $\rho^{-1/2}U(u)$ 在 $u=0$ 及 $u=2K$ 上应同时保持有限,这一条件可确定 h 的特征值及特征函数 $U(u)$. 对于在 $v=\text{const.}$ 內部正則的势, $\rho^{-1/2}V(v)$ 应在 $v=0$ 上保持有限,对于在 $v=\text{const.}$ 外部正則的势, V 在 $-K'$ 上的宇称应与 U 在 K 上的宇称一样.

15-2. 拉美方程

上面几節中已經証明有許多边值問題的解取决于微分方程

$$(1)\qquad \frac{d^2\Lambda}{dz^2}+\{h-n(n+1)[k\,\mathrm{sn}(z,k)]^2\}\Lambda=0,$$

这一方程称为 **Lamé 方程的 Jacobi 型**,或簡称 **Lamé 方程**. 这一形式的方程系由 Hermite, E. T. Whittaker, Ince 及其他作者所应用,从数值計算的角度來看,較优于其他形式(見下文).

在(1)式中, k 的值一般在 0 与 1 之間,但在 15-1-3 節中,也有 k 是复数,且 $|k|=1$ 的情形. z 为一复变数,在大部分边值問

题中，z 只在直綫 $\mathrm{Re}\, z = N\boldsymbol{K}$ 或 $\mathrm{Im}\, z = N\boldsymbol{K}'$ 上变化，此处 N 为一整数. h 为一参数，它的特征值可用周期条件來确定，也可以用"有限性条件"來确定. n 有时是整数，有时是半整奇数（如 15-1-3 節的情形），有时（如 15-1-2 節的一个問題中的情形）是一复数，其实部为 $-\frac{1}{2}$.

方程的解有好几种形式. 首先是：在四分之一周期点 $M\boldsymbol{K}+iN\boldsymbol{K}'$（$M, N$ 均为整数）之一上具有給定字称的解，或在 $\mathrm{sn}\, z$ 的極点 $2M\boldsymbol{K}+i(2N+1)\boldsymbol{K}'$（$M, N$ 均为整数）之一上保持有限的解. 这种解，在任何給定的 h, n, k 值下是存在的，除常数因子外可完全确定. 其次，是具有規定周期（也是 $\mathrm{sn}\, z$ 的一个周期）的解. 下面將会看到，对于給定的 n, k，使这种解存在的 h 的特征值組成一無窮序列. 在 15-1-1 及 15-1-2 節中，有应用二規定周期的解的情形. 这种解，在下面將会看到，僅在 $2n$ 为整数时存在. 最后，在 15-1-3 節中我們得出了在二極点上都保持有限的解. 以后將会看到，对于給定的 n, k，使这种解存在的 h 的特征值組成一無窮序列.

Lamé 方程除了 Jacobi 形式 (1) 之外，还有其他重要的形式. 如令

$$(2)\qquad k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3},\quad z = i\boldsymbol{K}' + u(e_1 - e_3)^{1/2},$$

$$(e_1 - e_3)h + n(n+1)\, e_3 = H,$$

并应用公式 13-16 (4) 及 13-18 節的表 7，可得 **Lamé 方程的 Weierstrass 形式**：

$$(3)\qquad \frac{d^2 \Lambda}{dz^2} + [H - n(n+1)\wp(u)]\,\Lambda = 0.$$

这一方程系由 Halphén 及其他法國数学家所应用，在近代理論工作中有廣泛的用途.

作代换

(4) $\operatorname{sn} z=\cos\zeta,\ \zeta=\frac{1}{2}\pi-\operatorname{am} z,$

即可得如下的三角形式

(5) $$[1-(k\cos\zeta)^2]\frac{d^2\Lambda}{d\zeta^2}+k^2\cos\zeta\sin\zeta\frac{d\Lambda}{d\zeta}+[h-n(n+1)(k\cos\zeta)^2]\Lambda=0.$$

这一形式是 G. H. Darwin 及 Ince 所用.

另外还有几种代数形式. 命

(6) $(\operatorname{sn} z)^2=x,$

则从 (1) 可得

(7) $$\frac{d^2\Lambda}{dx^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-k^{-2}}\right)\frac{d\Lambda}{dx}+\frac{hk^{-2}-n(n+1)x}{4x(x-1)(x-k^{-2})}\Lambda=0,$$

如命

(8) $\wp(u)=p,$

则从 (3) 可得

(9) $$\frac{d^2\Lambda}{dp^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-e_1}+\frac{1}{p-e_2}+\frac{1}{p-e_3}\right)\frac{d\Lambda}{dp}+\frac{H-n(n+1)p}{4(p-e_1)(p-e_2)(p-e_3)}\Lambda=0.$$

从这些形式作有理变换可得另外一些代数形式. 代数形式的应用者是 Stieltjes, F. Klein, Bôcher 等.

Lamé 方程的代数形式是 Fuchs 型的,具有四个正则奇点. 有三个有限的正则奇点[对(7)式來說,是 0, 1, k^{-2}, 对(9)式來說,在 e_1, e_2, e_3], 其指数为 0, ½, 一个正则奇点在 ∞, 指数为 $-\frac{1}{2}n$, $\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}$. 关于 Fuchs 方程的理論可参看 Ince (1927, p. 370 ff) 或 Poole (1936, p. 74 ff).

有些一般定理同样也适用于其他形式. 关于双周期系数的微

分方程的理論見 Ince (1927, p. 375) 或 Poole (1934, p. 170 ff.)；單周期系数的方程理論見 Ince (1927, p. 381 ff.) 或 Poole (1936, p. 178 ff.).

除非另有說明，我們总把 h, k, n 作为給定(实数或复数)常数，变数作为复变数.

15-3. 親氏方程

可以証明任一具有四个奇点的二階 Fuchs 方程可化成如下形式

$$(1)\qquad \frac{d^2w}{dx^2}+\left(\frac{\gamma}{x}+\frac{\delta}{x-1}+\frac{\varepsilon}{x-a}\right)\frac{dw}{dx}+\frac{\alpha\beta x-q}{x(x-1)(x-a)}w=0,$$

其中

$$(2)\qquad \alpha+\beta-\gamma-\delta-\varepsilon+1=0,$$

此处 $x=0, 1, a, \infty$ 是(1)的奇点，这些奇点上的指数取决于 $\alpha, \cdots, \varepsilon$, 常数 q 是配連参数，它的出現是由于：具有四个(或較多的)奇点的二階 Fuchs 方程不能由奇点的位置及指数來完全确定(見 Ince, 1927, p. 370 ff; Poole, 1936, p. 77 ff.). 方程的簡化可通过自变数的綫性分式变换及因变数的適当变换[根据(4)及(5)]來完成，方程 (1) 称为 Heun 方程 (Heun, 1889, Whittaker 及 Watson, 1927, p. 576 ff.).

Heun 方程可用一 P-符号來标誌(見 2-6-1 節或 Ince, 1927, p. 372),

$$(3)\qquad P\begin{Bmatrix} 0 & 1 & a & \infty & \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & x \\ 1-\gamma & 1-\delta & 1-\varepsilon & \beta & \end{Bmatrix}$$

但应注意，P-符号并不能完全标誌出方程，在方程的任一变换中，配連参数的变换应由明确的計算加以肯定.

对于四列 P-符号，有如下的綫性变换

$$(4)\qquad \left(\frac{x-a}{x-d}\right)^{\rho}\left(\frac{x-b}{x-d}\right)^{\sigma}\left(\frac{x-c}{x-d}\right)^{\tau} P\begin{Bmatrix} a & b & c & d & \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' & x \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' & \delta'' & \end{Bmatrix}$$

$$=P\begin{Bmatrix} a & b & c & d & \\ \alpha'+\rho & \beta'+\sigma & \gamma'-\tau & \delta'-\rho-\sigma-\tau & x \\ \alpha''+\rho & \beta''+\sigma & \gamma''+\tau & \delta''-\rho-\sigma-\tau & \end{Bmatrix}$$

$$(5)\qquad P\begin{Bmatrix} a & b & c & d & \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' & x \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' & \delta'' & \end{Bmatrix}=P\begin{Bmatrix} M(a) & M(b) & M(c) & M(d) & \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' & M(x) \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' & \delta'' & \end{Bmatrix},$$

其中

$$(6)\qquad \alpha'+\alpha''+\beta'+\beta''+\gamma'+\gamma''+\delta'+\delta''=2,$$

$$M(x)=\frac{Ax+B}{Cx+D},\quad AD-BC\neq 0.$$

如二个指数差分等于 $\frac{1}{2}$，则得二次变换．例如，在 (1) 及 (3) 中，如

$$(7)\qquad \delta=\varepsilon=\tfrac{1}{2},\ \gamma=\alpha+\beta,\ 则$$

$$(8)\qquad P\begin{Bmatrix} 0 & 1 & a & \infty & \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & x \\ 1-\gamma & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \beta & \end{Bmatrix}=P\begin{Bmatrix} 0 & 1 & a & \infty & \\ 0 & \alpha & 0 & 0 & \dfrac{x-a}{x-1} \\ \frac{1}{2} & \beta & 1-\gamma & \frac{1}{2} & \end{Bmatrix}$$

$$=P\begin{Bmatrix} -a^{\frac{1}{2}} & -1 & 1 & a^{\frac{1}{2}} & \\ 0 & \alpha & \alpha & 0 & \left(\dfrac{x-a}{x-1}\right)^{\frac{1}{2}} \\ 1-\gamma & \beta & \beta & 1-\gamma & \end{Bmatrix}$$

$$=P\begin{Bmatrix} 0 & 1 & A^2 & \infty & \\ \alpha & 0 & 0 & \alpha & X \\ \beta & 1-\gamma & 1-\gamma & \beta & \end{Bmatrix}$$

在最后一 P-符号中

$$(9)\qquad A=\frac{1+a^{\frac{1}{2}}}{1-a^{\frac{1}{2}}},\quad X=A\frac{(x-1)^{\frac{1}{2}}+(x-a)^{\frac{1}{2}}}{(x-1)^{\frac{1}{2}}-(x-a)^{\frac{1}{2}}}.$$

如三个指数差分等于½(像 Lamé 方程代数形式的情形),則有三个不同的二次变換,其中每一个可接以第二个二次变换,从而得出双二次变换.

現在來求方程 (1) 的解的分析表示式.

設 $a_1, \cdots, a_4$ 为四列 P-符号的奇点, α_i' 及 α_i'' 为 a_i 上的指数, $\Sigma(\alpha_i'+\alpha_i'')=2$. 与三列 P-符号 (2-9 節)的 Kummer 24 个級数相仿,我們有 192 个級数,其形式如下

$$(10)\quad \left(\frac{x-a_j}{x-a_l}\right)^{\sigma}\left(\frac{x-a_k}{x-a_l}\right)^{\tau}\sum_{m=0}^{\infty}A_m\left(\frac{a_j-a_l}{a_j-a_i}\,\frac{x-a_i}{x-a_l}\right)^{\rho+m},$$

其中 i, j, k, l 是 1, 2, 3, 4 的一个排列; ρ 为 α_i' 或 α_i''; σ 为 α_j' 或 α_j''; τ 为 α_k' 或 α_k''. 这 192 个級数中,实际只 96 个是不同的. 这些級数曾由 Heun (1889), Snow (1952, 第 7 章)等加以研究. 如二次变换存在[如方程 (8) 的情形],則可得其他冪級数展开式.

同时,(1)的解也可展开为超比函数的級数. 这种展开式曾由 Svartholm (1939)及 Erdélyi (1942, 1944)加以研究. 一个典型的展开式为

$$(11)\quad P\begin{Bmatrix} 0 & 1 & a & \infty & \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & x \\ 1-\gamma & 1-\delta & 1-\varepsilon & \beta & \end{Bmatrix} = \sum_{m=0}^{\infty}A_m P\begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \lambda+m & x \\ 1-\gamma & 1-\delta & \mu-m & \end{Bmatrix}$$

其中

$$(12)\quad \lambda+\mu=\gamma+\delta-1=\alpha+\beta-\varepsilon.$$

可以証明 (Erdélyi, 1944), λ 及 μ 的选擇主要有二种可能. I 型級数 (Erdélyi, 1942)以 $\lambda=\alpha$, $\mu=\beta-\varepsilon$, 在以 0, 1 为焦点并通过 a 的椭圓的外部收斂,表示 (3) 式的一个分枝,屬于 ∞ 上指数 α. 对于(3)的每一分枝,这一类型級数有三个不同的展开式. II 型級

数 (Svartholm 1939) 以 $\mu=0, \gamma-1, \delta-1$ 或 $\gamma+\delta-2$. 它是 Jacobi 多項式的級数，一般并不收斂；但在配連參数具有一特征值时 Heun 函数(見下文)的例外情形下收斂.

在所有上述展开式中，系数 X_r 滿足三項遞推关系

(13) $\beta_0X_0+\gamma_1X_1=0,$

$$\alpha_rX_{r-1}+\beta_rX_r+\gamma_{r+1}X_{r+1}=0. \qquad r=1, 2, \cdots$$

其中 $\alpha_r, \beta_r, \gamma_r$ 都是 r 及參数的已知表达式，$\gamma_r\neq0$，且当 $\gamma\to\infty$ 时，

(14) $\alpha_r\to\alpha,\ \beta_r\to\beta,\ \gamma_r\to\gamma.$

如 t_1 及 t_2 为二次方程

(15) $\alpha+\beta t+\gamma t^2=0$

的二个根，且 $|t_1|<|t_2|$，則 $\lim X_r/X_{r-1}$ 存在，一般总等于 t_2；如題中的參数滿足某一条件，当 $r\to\infty$ 时

$$\lim X_r/X_{r-1}=t_1$$

(Perron, 1929, §57). 遞推关系可寫为

$$\frac{X_r}{X_{r-1}}=\frac{-\alpha_r}{\beta_r+\gamma_{r-1}X_{r-1}/X_r}, \qquad r=1, 2, \cdots$$

重复应用这一关系，可得如下的無窮連分式：

(16) $$q_r=-\cfrac{\alpha_r}{\beta_r-\cfrac{\alpha_{r+1}\gamma_{r+1}}{\beta_{r+1}-\cfrac{\alpha_{r+2}\gamma_{r+2}}{\beta_{r+2}-\cfrac{\alpha_{r+3}\gamma_{r+3}}{\beta_{r+3}-\cdots}}}}$$

可以証明，这一連分式在 $|t_1|=|t_2|$，$t_1\neq t_2$ 时發散，在 $|t_1|<|t_2|$ 或 $t_1=t_2$ 时收斂，当 $r\to\infty$ 时 $q_r\to t_1$.

如 $|t_1|<|t_2|$，且參数滿足方程 $\beta_0=q_1\gamma_1$，則当 $r\to\infty$ 时，$X_r/X_{r-1}\to t_1$，X_r 可用 q_r 來計算；如 $|t_1|<|t_2|$ 且 $\beta_0\neq q_1\gamma_1$，則 $X_r/X_{r-1}\to t_2$；如 $|t_1|=|t_2|$，$t_1\neq t_2$，則 $\lim X_r/X_{r-1}$ 不存在.

在 Heun 方程(因而也是 Lamé 方程)的应用中，β_0 及 q_r 依賴于配連參数(q 或 h). 一般來說，$\beta_0\neq q_1\gamma_1$，$X_r/X_{r-1}\to t_2$，冪級

数的收斂域以及超比函数I型級数的收斂域都是有限的，而且只包含方程四奇点中的一个奇点；在这种情况下，超比函数II型級数并不存在．如果配連参数具有特征值序列中的一个值，则 $\beta_0=q_1\gamma_1$，$X_r/X_{r-1}\to t_1$，級数在較大的域上收斂，这一域所包含的至少有二个奇点，对应的特征函数在二奇点上具有规定的性态，称为 Heun (或 Lamé) 函数．在这种情况下，超比函数的 II 型級数也收斂，并表示一 Heun (或 Lamé) 函数．

关于配連参数特征值的存在和分布定理可从一般（奇異）Sturm-Liouville 定理推出．

一般說來，$\beta_0=q_1\gamma_1$ 是配連参数的一个超越方程，但当 $\alpha_R=0$ (R 为某一正整数)时为例外．当 $r<R$ 时，q_r 是有限的連分式，$\beta_0=q_1\gamma_1$ 是配連参数的代数方程，如 $\beta_0=q_1\gamma_1$，则 $X_R=0$，从(13)式又可得 $X_{R+1}=X_{R+2}=\cdots=0$．此时的級数展开式有尽，于是得 Heun (或 Lamé) 多項式，或代数 Heun (或 Lamé) 函数．又，当 $\alpha_R=0$ 时，可令 $X_0=X_1=\cdots=X_{R-1}=0$，从方程 $\beta_R=\gamma_{R+1}q_{R+1}$ (是一超越方程)中确定配連参数，而得超越 Heun (或 Lamé) 函数．

15-4．一般拉美方程的解

現在我們將把上面的結果应用于 Lamé 方程．令

(1) $\quad s=\operatorname{sn} z,\quad c=\operatorname{cn} z,\quad d=\operatorname{dn} z.$

在整个本節中，n 及 h 都是任意的．

从 15-2 (7) 式

(2) $$\Delta=P\left\{\begin{matrix} 0 & 1 & k^{-2} & \infty & \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}n & s^2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}n+\frac{1}{2} & \end{matrix}\right\},$$

从 15-3 (4), (5), (8) 可得上式的各种变换；特别是，从 15-3 (8) 有

(3) $$\Lambda=P\left\{\begin{matrix} 0 & 1 & \left(\frac{1+k}{1-k}\right)^2 & \infty & \\ -\frac{1}{2}n & 0 & 0 & -\frac{1}{2}n & \frac{1+k}{1-k}\,\frac{d+kc}{d-kc} \\ \frac{1}{2}n+\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}n+\frac{1}{2} & \end{matrix}\right\}.$$

(2) 的其他变换可導出下列各式

(4) $$\Lambda=P\left\{\begin{matrix} -1 & 1 & k^{-1} & -k^{-1} & \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}n & -\frac{1}{2}n & \frac{c}{d} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}n+\frac{1}{2} & \frac{1}{2}n+\frac{1}{2} & \end{matrix}\right\},$$

(5) $$\Lambda=P\left\{\begin{matrix} k' & -k' & ik & -ik & \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}n & -\frac{1}{2}n & \frac{d}{s} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}n+\frac{1}{2} & \frac{1}{2}n+\frac{1}{2} & \end{matrix}\right\},$$

(6) $$\Lambda=P\left\{\begin{matrix} ik' & -ik' & i & -i & \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}n & -\frac{1}{2}n & \frac{c}{s} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}n+\frac{1}{2} & \frac{1}{2}n+\frac{1}{2} & \end{matrix}\right\}.$$

从 (2), (4), (5), (6)及 15–3 節的結果可得 Lamé 方程解的許多展开式. Erdélyi 的一篇未刊布的表列出了 30 个变数, 可用于 15–3(10) 式那样的級数中, 每一变数有四个不同的因子. 由于这些变数的前 18 个的 ρ 可以为 0 或 $\frac{1}{2}$, 因此共有 192 个不同的級数. 关于最簡單的一些冪級数及其系数所满足的遞推关系可參看 Ince, 1940 a, 及其中所列的文献. 关于展为 Legendre 函数的展开式, 見 Erdélyi, 1942 a. 展为指数函数或三角函数的展开式可从 15–2 (5) 式及 Lamé 方程的其它三角形式中, 根据周期系数微分方程理論推出 (Ince, 1927, p. 381 ff., Poole, 1936, p. 182 ff.). 这种展开式曾由 Ince(1940 b.) 及 Erdélyi (1942 a) 討論过.

15–5. 拉美函数

設 k, n 为已知, $0<k<1$, 且 $n(n+1)$ 是实数, 因此 n 是实数或 $n=-\frac{1}{2}+ip$, 此处 p 是实数. 下面我們將研究 Lamé 方程

的周期解，并証明这种解在 h 的某些(特征)值下存在；我們把它称为周期 Lamé 函数，或簡称 Lamé 函数.

15-5-1. 实周期的拉美函数

由于 $\mathrm{sn}^2 z$ 的原始实周期为 $2\mathbf{K}$，故知任一实周期 Lamé 函数的原始实周期必形如 $P=2p\mathbf{K}$，此处 $p=1,2,\cdots$. 今，$\mathrm{sn}^2 z$ 是 $z-\mathbf{K}$ 的偶函数，如 $\Lambda(z)$ 为 Lamé 方程的一个周期解，則函数 $\Lambda(2\mathbf{K}-z)$，$\Lambda(z)\pm\Lambda(2\mathbf{K}-z)$ 也必是它的解，因此，对 Lamé 函数的研究，可限制于 $z-\mathbf{K}$ 的偶函数或奇函数. 实周期的 Lamé 函数，如为 $z-\mathbf{K}$ 的偶函数，記为 $\mathrm{Ec}_n(z,k^2)$，如为 $z-\mathbf{K}$ 的奇函数，記为 $\mathrm{Es}_n(z,k^2)$. 更明确地說，$\mathrm{Ec}_n^m(z,k^2)$ 及 $\mathrm{Es}_n^m(z,k^2)$ 代表的是周期为 $P=2p\mathbf{K}$ 的函数，在区間 $0\leqslant z<2p\mathbf{K}$ (或任一半开的实区間，其長度为 P) 上恰具有 pm 个零点. 属于 Ec_n^m 及 Es_n^m 的 h 的特征値分別以 $a_n^m(k^2)$ 及 $b_n^m(k^2)$ 表示. 这一記法系 Ince (1940 a) 所引進，并由 Erdélyi (1941 a) 加以修正. 現在尙無一般公認的規格，在 $\mathrm{Ec}_n^m(z)$ 及 $\mathrm{Es}_n^m(z)$ 中尙有未确定的常数因子. 因此，在像下面 (31) 式那样的关系中，常数因子删節不寫.

周期为 $2\mathbf{K}$ 及 $4\mathbf{K}$ 的解. 在这二种情况中，由于周期性，都有 $\mathrm{Ec}(-\mathbf{K}+t)=\mathrm{Ec}(3\mathbf{K}+t)$，根据字称关系，这等于 $\mathrm{Ec}(-\mathbf{K}-t)$，因此，$\mathrm{Ec}(z)$ 同时是 $z-\mathbf{K}$ 及 $z+\mathbf{K}$ 的偶函数. 从而得边界条件

(1) $\quad \Lambda'(-\mathbf{K})=\Lambda'(\mathbf{K})=0,\ \Lambda=\mathrm{Ec}(z).$

反之，如果 15-2(1) 式的一个解 $\Lambda(z)$ 满足(1)，則它必同时是 $z-\mathbf{K}$ 及 $z+\mathbf{K}$ 的偶函数，因此必具有周期 $4\mathbf{K}$. 同理

(2) $\quad \Lambda(-\mathbf{K})=\Lambda(\mathbf{K})=0,\ \Lambda=\mathrm{Es}(z).$

由于在 $\pm\mathbf{K}$ 上的对称关系，所以我們只須研究区間 $(-\mathbf{K},\mathbf{K})$ 上周期为 $2\mathbf{K}$ 及 $4\mathbf{K}$ 的 Lamé 函数就夠了. 我們將証明这一区間可簡化为 $(0,\mathbf{K})$.

如以 $E(z)$ 代表 $\mathrm{Ec}(z)$ 或 $\mathrm{Es}(z)$，則 $E(z)$ 及 $E(-z)$ 满足同一个微分方程，根据 (1) 及 (2)，它們还满足同样的边界条件，因此必互为常数倍数．由此可知，$E(z)$ 或者是 z 的偶函数，或者就是 z 的奇函数，而有下列四种情形 $(m=0,1,2,\cdots)$：

(3) $\Lambda(0)=\Lambda(K)=0,\ \Lambda=\mathrm{Es}_n^{2m+2}(z)$，周期 $2K$

(4) $\Lambda'(0)=\Lambda(K)=0,\ \Lambda=\mathrm{Es}_n^{2m+1}(z)$，周期 $4K$

(5) $\Lambda(0)=\Lambda'(K)=0,\ \Lambda=\mathrm{Ec}_n^{2m+1}(z)$，周期 $4K$

(6) $\Lambda'(0)=\Lambda'(K)=0,\ \Lambda=\mathrm{Ec}_n^{2m}(z)$，　周期 $2K$

及適当的对称关系．

我們的函数也可以确定为区間 $(0,2K)$ 上的边值問題的解．

(7) $\Lambda(0)=\Lambda(2K)=0,\ \Lambda=\mathrm{Es}_n^{2m}(z)$ 或 $\mathrm{Ec}_n^{2m+1}(z)$．

(8) $\Lambda'(0)=\Lambda'(2K)=0,\ \Lambda=\mathrm{Es}_n^{2m+1}(z)$ 或 $\mathrm{Ec}_n^{2m}(z)$．

根据 Sturm-Liouville 定理（見，例如，Ince, 1927, §10-61），可知(3)-(6)中每一問題对每一 $m=0,1,2,\cdots$ 恰有一个解存在．由于 Sturm-Liouville 問題的特征数組成遞增序列，故从 (1)，(2)，(7) 及 (8) 式得

(9) $a_n^0<a_n^1<a_n^2<\cdots$，当 $m\to\infty$ 时，$a_n^m\to\infty$．

(10) $b_n^1<b_n^2<\cdots$，　当 $m\to\infty$ 时，$b_n^m\to\infty$．

(11) $a_n^1<b_n^2<a_n^3<b_n^4<\cdots$．

(12) $a_n^0<b_n^1<a_n^2<b_n^3<\cdots$．

这样一来，特征值的相对位置就很容易确定，但关于 a_n^m 及 b_n^m 的相对位置还不能作出陈述的語句．Ince (1940 a, b) 就 $2n$ 的整数值計算过特征值，但应注意，他的記法与此处所用的略有不同，要把 Ince 的記法用于本書中，应將 a_n^{2m+1} 及 b_n^{2m+1} 互調．

Ince(1940 a)首先用冪級数來構作 Lamé 函数．后來(1940 b)他發現了收斂得更快(特别是在 k 接近于 1 的时候)的三个級数展开式，作为構造 Lamé 函数之用．

展为三角級数的展开式以 15-2(5) 式及 $\Lambda(z)/\mathrm{dn}\,z$ 所满足的

类似微分方程为根据．对于每一个周期为 2K 或 4K 的 Lamé 函数，有二个展开式如下．其中所用的簡記符号为

(13)　$\zeta=\frac{1}{2}-\mathrm{am}\,z,\quad H=2h-k^2n(n+1)$

且 m 为一非負整数．

周期为 2K，4K 的 Lamé 函数的三角級数：

(14)
$$\mathrm{Ec}_n^{2m}(z)=\frac{1}{2}A_0+\sum_{r=1}^{\infty}A_{2r}\cos(2r\zeta)$$
$$=\mathrm{dn}\,z\left[\frac{1}{2}C_0+\sum_{r=1}^{\infty}C_{2r}\cos(2r\zeta)\right].$$

(15)
$$\mathrm{Ec}_n^{2m+1}(z)=\sum_{r=0}^{\infty}A_{2r+1}\cos[(2r+1)\zeta]$$
$$=\mathrm{dn}\,z\sum_{r=0}^{\infty}C_{2r+1}\cos[(2r+1)\zeta].$$

(16)
$$\mathrm{Es}_n^{2m}(z)=\sum_{r=1}^{\infty}B_{2r}\sin(2r\zeta)=\mathrm{dn}\,z\sum_{r=1}^{\infty}D_{2r}\sin(2r\zeta).$$

(17)
$$\mathrm{Es}_n^{2m+1}(z)=\sum_{r=0}^{\infty}B_{2r+1}\sin[(2r+1)\zeta]$$
$$=\mathrm{dn}\,z\sum_{r=0}^{\infty}D_{2r+1}\sin[(2r+1)\zeta].$$

(14)-(17) 式中系数的遞推关系为 ($r=1, 2, 3, \cdots$)．

(18)
$$-HA_0+(n-1)(n+2)k^2A_2=0,$$
$$\frac{1}{2}(n-2r+2)(n+2r-1)k^2A_{2r-2}-[H-4r^2(2-k^2)]A_{2r}$$
$$+\frac{1}{2}(n-2r-1)(n+2r+2)k^2A_{2r+2}=0.$$

(19)
$$-HC_0+n(n+1)k^2C_2=0,$$
$$\frac{1}{2}(n-2r+1)(n+2r)k^2C_{2r-2}-[H-4r^2(2-k^2)]C_{2r}$$
$$+\frac{1}{2}(n-2r)(n+2r+1)k^2C_{2r+2}=0.$$

(20)
$$-[H-2+k^2-\frac{1}{2}n(n+1)k^2]A_1+\frac{1}{2}(n-2)(n+3)k^2A_3=0,$$
$$\frac{1}{2}(n-2r+1)(n+2r)k^2A_{2r-1}-[H-(2r+1)^2(2-k^2)]A_{2r+1}$$
$$+\frac{1}{2}(n-2r-2)(n+2r+3)k^2A_{2r+3}=0.$$

(21)　$-[H-2+k^2-\frac{1}{2}n(n+1)k^2]C_1+\frac{1}{2}(n-1)(n+2)k^2C_3=0,$

$\frac{1}{2}(n-2r)(n+2r+1)k^2C_{2r-1}-[H-(2r+1)^2(2-k^2)]C_{2r+1}$
$+\frac{1}{2}(n-2r-1)(n+2r+2)k^2C_{2r+3}=0.$

(22)　$-(H-8+4k^2)B_2+\frac{1}{2}(n-3)(n+4)k^2B_4=0,$

$\frac{1}{2}(n-2r)(n+2r+1)k^2B_{2r}-[H-(2r+2)^2(2-k^2)]B_{2r+2}$
$+\frac{1}{2}(n-2r-3)(n+2r+4)k^2B_{2r+4}=0.$

(23)　$-(H-8+4k^2)D_2+\frac{1}{2}(n-2)(n+3)k^2D_4=0,$

$\frac{1}{2}(n-2r-1)(n+2r+2)k^2D_{2r}-[H-(2r+2)^2(2-k^2)]D_{2r+2}$
$+\frac{1}{2}(n-2r-2)(n+2r+3)k^2D_{2r+4}=0.$

(24)　$-[H-2+k^2+\frac{1}{2}n(n+1)k^2]B_1+\frac{1}{2}(n-2)(n+3)k^2B_3=0,$

$\frac{1}{2}(n-2r+1)(n+2r)k^2B_{2r-1}-[H-(2r+1)^2(2-k^2)]B_{2r+1}$
$+\frac{1}{2}(n-2r-2)(n+2r+3)k^2B_{2r+3}=0.$

(25)　$-[H-2+k^2+\frac{1}{2}n(n+1)k^2]D_1+\frac{1}{2}(n-1)(n+2)k^2D_3=0,$

$\frac{1}{2}(n-2r)(n+2r+1)k^2D_{2r-1}-[H-(2r+1)^2(2-k^2)]D_{2r+1}$
$+\frac{1}{2}(n-2r-1)(n+2r+2)k^2D_{2r+3}=0.$

上面 8 个遞推关系如除以 $4r^2$，并分别以 $X_r=A_{2r}, A_{2r+1}, \cdots, D_{2r+1}$，则得 15–3(13) 的形式．在所有 8 种情形下，$\alpha=\gamma=\frac{1}{2}k^2$，$\beta=k^2-2$，二次方程 15–3 (15) 的根为

(26)　$t_{1,2}=\left(\dfrac{1\pm k'}{k}\right)^2.$

对于周期 Lamé 函数，X_r/X_{r-1} 趋向于較小一根，(14)–(17)式在实数 ζ 下的收斂性可与公比为 $(1-k')/(1+k')$ 的几何級数相比．

对于 h 的特征值，連分式 15–3(16)給出了每一情形下的一个方程：这些方程由 Ince(1940 b)列出．一般，这些方程都是超越方程，其数值解法可參看 Ince(1932, p. 359)．不过，如 n 是一整数，則有些連分式有尽，共得（对于 $n=0, 1, 2, \cdots$）$2n+1$ 个 Lamé 函数，可以有尽三角級数表示，因此是 s, c, d 的多項式；这种函数称为 Lamé 多項式．注意，即使在这种情形下，仍存在有無窮多的

超越 Lamé 函数 (Ince, 1940 a).

实周期的 Lamé 函数也可用 Legendre 函数的級数來表示(見 Erdélyi, 1948 及其中所列文献). 在 Lamé 多項式情形下,得有限的展开式,在超越 Lamé 函数的情形下,則得無窮級数. 这些級数中的系数都是三角級数展开式中系数的簡單倍数. 展为 Legendre 函数的展开式在構作第二类 Lamé 函数(見下文)时最为有用.

Ince (1940 b) 討論过共存性問題. 他的結果如下. 設 n 不是整数,屬于 h 的同一特征值的,决不能有二个不同的周期函数. 如 n 为一整数,且有一 Lamé 多項式,則第二个解决不是周期函数. 反之,如 n 为整数而有一超越 Lamé 函数,則屬于 h 的同一特征值的有一个偶函数解和一个奇函数解. 因此, (9)-(12) 式可补充如下:

(27)　$a_n^m \neq b_n^m$, $m=0, 1, 2, \cdots$, 如 n 不为整数.

或如 n 为整数而 $m=0, 1, \cdots, |n+\frac{1}{2}|-\frac{1}{2}$;

$a_n^m = b_n^m$, 如 m 及 n 都是整数, $m>|n+\frac{1}{2}|-\frac{1}{2}$.

Ince (1940 a) 还研究了 n 很大时特征值的漸近性态,对于大的实数 n, 他求得

(28)　$a_n^{2m} \sim b_n^{2m+1} \sim (4m+1)k[n(n+1)]^{\frac{1}{2}}$,

$a_n^{2m+1} \sim b_n^{2m+2} \sim (4m+3)k[n(n+1)]^{\frac{1}{2}}$.

其他实周期的解　原始周期为 $8K$ 的解可用如下形式的 Fourier 級数表示,即

$$\sum A_r \frac{\cos}{\sin} (2r-\tfrac{1}{2})\zeta,$$

从此可導出系数的遞推关系,及包含一連分式的方程,用以确定 h 的特征值. 如 $2n$ 为一奇整数,則連分式有尽,得 h 的一个代数方程. 对应于这一代数方程的根的 Lamé 函数 (周期为 $8K$) 是 s, c, d 的代数函数,称为**代数 Lamé 函数**(关于代数 Lamé 函数可参看 Lambe, 1951, 1952 及其中所列的文献). 不論是代数的或超

越的 Lamé 函数，对于 $m=0, 1, 2, \cdots$ 及所有的 n, $a_n^{m+\frac{1}{2}}=b_n^{m+\frac{1}{2}}$.

原始周期为 $2pK$ 的解可用形如下式的 Fourier 級数表示，即

$$\sum A_r \frac{\cos}{\sin}\left(2r-\frac{q}{p}\right)\zeta,$$

从此可導出相当的遞推关系等. 除非 $p=1, 2$, 或 4, 否则，确定 h 的方程总是超越方程，而且 Fourier 級数永不有尽.

第二类函数 設 h 取其特征値之一，a_n^m 或 b_n^m. 则 Lamé 方程的一个解是一(周期) Lamé 函数，設为 $E(z)$. 除了 $2n$ 是整数，$m>|n+\frac{1}{2}|-\frac{1}{2}$ 的情形之外，Lamé 方程只具有一周期解，因此有必要構作出第二类 Lamé 函数. 对于很多的目的來說，適当的第二类函数將是 Lamé 方程的那个屬于 15-4 (2) 式中 ∞ 处指数为 $\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}$ 的解. 取 $\operatorname{Re} n\geqslant -\frac{1}{2}$.

第二类 Lamé 函数的構作，可用的方法有好几种. 方程 15-4 (2) 提供了一个 s 的降冪展开式，Heun 方程的理論另外提出了几个冪級数展开式. 又，如 $E(z)$ 为第一类 (周期) Lamé 函数，则

$$E(z)\int_{iK}^{z}[E(u)]^{-2}\,du$$

將代表第二类 Lamé 函数. 这一表示式常見于早期的文献中(如 Whittaker 及 Watson, 1927, §23-71).

如果第一类 Lamé 函数用第一类 Legendre 函数的級数表示，其中变数与 s, c 或 d 成比例，则將式中的每一个第一类 Legendre 函数簡單地換为对应的第二类 Legendre 函数，即可得对应的第二类 Lamé 函数. 这一解在 $2n$ 及 $2m$ 都是整数，$0\leqslant m\leqslant|n+\frac{1}{2}|-\frac{1}{2}$ 时特别重要. 在这种情况下，第一类 Lamé 函数是一 Lamé 多項式(如 $2n$ 是偶数)或一代数 Lamé 函数(如 $2n$ 为奇数)，在任一情形下，它是以有尽的第一类 Legendre 函数的級数表示的，而对应的第二类 Lamé 函数將以第二类 Legendre 函数的有限組合來表

示，这一表示式在构造外椭球調和函数（見 15-1-1 節）时最为有用.

15-5-2. 虛周期的拉美函数. 变换公式

由于 $\mathrm{sn}^2 z$ 的原始虛周期为 $2iK'$，因此，任一虛周期 Lamé 函数的原始周期必須为 $2ipK'$，此处，$p=1,2,\cdots$. 这种函数的存在及其性質可用类似于上節的方法，建立某些 Sturm-Liouville 問題，如区間 $(K, K+iK')$ 的問題來确立. 除此之外，我們还將应用 Lamé 方程的虛变换从上節的許多結果中導出全部結論.

在 15-2 (1) 中，命

$$(29)\quad z'=i(z-K-iK'),\ h'=n(n+1)-h,$$

并应用 13-18 節的表 7 及 13-22 節的表 11 得

$$[k\,\mathrm{sn}(z,k)]^2=\left[\frac{\mathrm{dn}\,(iz',k)}{\mathrm{cn}\,(iz',k)}\right]^2=[\mathrm{dn}\,(z',k')]^2$$
$$=1-[k'\mathrm{sn}\,(z',k')]^2.$$

因此

$$(30)\quad \frac{d^2\Lambda}{dz'^2}+\{h'-n(n+1)[k'\mathrm{sn}(z',k')]^2\}\Lambda=0.$$

顯然，(30) 的每一个解必滿足 15-2 (1)，反之亦然. 不僅如此，(30)式的解作为 z' 的函数时具有一实周期，当作 z 的函数时將具有虛周期. 从 15-5-1 節的結果可得下列結論.

我們只要考慮虛周期为 $2ipK'$ $(p=1,2,\cdots)$ 的 Lamé 函数就夠了，它是 $z-K=-i(z'-K')$ 的偶函数或奇函数. 偶函数以 $\mathrm{Ec}_n'^m(z,k^2)$ 表示，奇函数以 $\mathrm{Es}_n'^m(z,k^2)$ 表示，如果 $z=K+it$，t 取值于区間 $0<t<2pK'$（或任一長为 $2pK'$ 的半开区間）时，它們恰具有 pm 个零点. 屬于 $\mathrm{Ec}_n'^m$ 及 $\mathrm{Es}_n'^m$ 的 $h'=n(n+1)-h$ 的特征值分別以 $a_n'^m(k^2)$ 及 $b_n'^m(k^2)$ 表示.

如果 $0<k<1$，且 $n(n+1)$ 为实数，則对于每一个 $m=0,1,2,\cdots$，

恰有一个 $\mathrm{Ec}_n'^m$，对于每一个 $m=1, 2, \cdots$，有一个 $\mathrm{Es}_n'^m$. 如 m 为偶数，这些函数的周期为 $2iK'$，如 m 为奇数，则为 $4iK'$. 这些函数以及屬于它們的 h' 的特征值可表达为

(31) $\quad \mathrm{Ec}_n'^m(z, k^2)=\mathrm{Ec}_n^m(z', k'^2),\ \mathrm{Es}_n'^m(z, k^2)=\mathrm{Es}_n^m(z', k'^2).$

(32) $\quad a_n'^m(k^2)=a_n^m(k'^2),\ b_n'^m(k^2)=b_n^m(k'^2).$

当且僅当 n 为一整数时方有二个周期为 $2iK'$ 或 $4iK'$ 的不同的解屬于 h' (或 h) 的同一特征値，此时所論函数都是虛周期的超越 Lamé 函数(卽 $m>|n+½|-½$).

关于特征値的相对位置和漸近性态，可从(9)-(12)，(27)，(28)式中应用 (32) 式求得.

Lamé 多項式，是 s, c 及 d 的多項式，同时具有一实的周期和一虛的周期. 从零点的分析中可得如下恆等式:

(33) $\quad \mathrm{Ec}_n^m(z, k^2)=\mathrm{Ec}_n'^{n-m}(z, k^2)=\mathrm{Ec}_n^{n-m}(z', k'^2).$

$\quad \mathrm{Es}_n^m(z, k^2)=\mathrm{Es}_n'^{n-m+1}(z, k^2)=\mathrm{Es}_n^{n-m+1}(z', k'^2).$

(34) $\quad a_n^m(k^2)+a_n'^{n-m}(k^2)=a_n^m(k^2)+a_n^{n-m}(k'^2)=n(n+1),$

$\quad b_n^m(k^2)+b_n'^{n-m+1}(k^2)=b_n^m(k^2)+b_n^{n-m+1}(k'^2)=n(n+1).$

上面的式子只要 n 是整数，$m=0, 1, \cdots, |n+½|-½$, Lamé 函数經適当正規化后都正确 (Erdélyi, 1941 a). 特别是，对于

$$k^2=k'^2=½,$$

(35) $\quad a_n^m(½)+a_n^{n-m}(½)=b_n^m(½)+b_n^{n-m+1}(½)=n(n+1),$

(36) $\quad a_{2n}^n(½)=n(2n+1),\ b_{2n+1}^{n+1}(½)=(n+1)(2n+1),$

$$n=0, 1, 2, \cdots$$

类似的关系对代数 Lamé 函数也成立 (Erdélyi, 1941 b).

(37) $\quad \mathrm{Ec}_n^{m+½}(z, k^2)=\mathrm{Ec}_n'^{n-m}(z, k^2)=\mathrm{Ec}_n^{n-m}(z', k'^2),$

$\quad \mathrm{Es}_n^{m+½}(z, k^2)=\mathrm{Es}_n'^{n-m}(z, k^2)=\mathrm{Es}_n^{n-m}(z', k'^2).$

(38) $\quad a_n^{m+½}(k^2)+a_n'^{n-m}(k^2)=a_n^{m+½}(k\ )+a_n^{n-m}(k'^2)=n(n+1),$

(39) $\quad a_n^{m+½}(½)+a_n^{n-m}(½)=n(n+1),$

其中 $n-½$ 应为一整数，$m=0, \cdots, |n-½|$, Lamé 函数均經过

適当正規化．注意，对应的偶及奇代数 Lamé 函数屬于同样的特征值，因此对于这些函数來說，$a=b$．从 (39) 式还可得

$$a_{2m+1/2}^{m+1/2}(1/2)=1/2(2m+1/2)(2m+3/2),\qquad m=0,1,2,\cdots \tag{40}$$

現在可討論周期为 $2\mathbf{K}$, $4\mathbf{K}$, $2i\mathbf{K}'$, $4i\mathbf{K}'$ 的解的共存性問題（見 Erdélyi, 1941 a）．我們已經証明二个实周期的解在而且只有在 n 为整数时共存（屬于同一特征值），而且所論函数都是相同实周期的超越 Lamé 函数．同理，二个虛周期的解在而且只有在 n 为整数，所論函数为同一虛周期的超越 Lamé 函数时共存．不僅如此，在 Lamé 多項式的情形下，实周期的 Lamé 函数与虛周期的 Lamé 函数重合．Lamé 多項式都是双周期 Lamé 函数，可以証明，它是 Lamé 方程唯有的双周期解（周期为 $4\mathbf{K}$, $4i\mathbf{K}''$）．从特征值的相对位置的分析中也可以証明，二个不同的 Lamé 函数，其中一个具有实周期 $2\mathbf{K}$ 或 $4\mathbf{K}$，另一个具有虛周期 $2i\mathbf{K}'$ 或 $4i\mathbf{K}'$，决不能屬于同一个 h 值．

总結上面的討論，如果 $E_n(z)$ 是周期为 $2\mathbf{K}$, $4\mathbf{K}$, $2i\mathbf{K}'$ 或 $4i\mathbf{K}'$ 的 Lamé 函数，n 不为整数，則 $E_n(z)$ 只有一实的或只有一虛的周期，而且它是 Lamé 方程的唯一周期解．反之，如 n 为整数，則 $E_n(z)$ 或者是双周期的 Lamé 多項式（在这种情形下对应的第二类 Lamé 函数不是周期函数），或者是一超越的單周期 Lamé 函数，与另一个同周期的 Lamé 函数共存．

15.5.3．拉美函数的積分方程

Lamé 函数的積分方程由 Whittaker (1915, a, b) 發現，其后由 Ince (1922, 1940 a, b), Erdélyi (1943) 及其他作者所研究．对应的 Heun 函数的積分方程由 Lambe–Ward (1934) 及 Erdélyi (1942 b) 研究．

設 $N(\beta,\gamma)$ 滿足偏微分方程

$$(41)\quad \frac{\partial^2 N}{\partial \beta^2}-n(n+1)\,[k\,\mathrm{sn}\,(\beta,k)]^2N$$

$$=\frac{\partial^2 N}{\partial \gamma^2}-n(n+1)\,[k\,\mathrm{sn}\,(\gamma,k)]^2N.$$

并設 $\Lambda(\gamma)$ 为 Lamé 方程

$$(42)\quad \frac{d^2\Lambda}{d\gamma^2}+\{h-n(n+1)[k\,\mathrm{sn}\,(\gamma,k)]^2\}\,\Lambda=0$$

的一个解，于是，經分部積分后得

$$(43)\quad \left\{\frac{d^2}{d\beta^2}+h-n(n+1)[k\,\mathrm{sn}\,(\beta,k)]^2\right\}\int_a^b N(\beta,\gamma)\,\Lambda(\gamma)\,d\gamma$$

$$=\int_a^b\left(\frac{\partial^2 N}{\partial\gamma^2}+\{h-n(n+1)[k\,\mathrm{sn}\,(\gamma,k)]^2\}N\right)\Lambda(\gamma)\,d\gamma$$

$$=\left[\frac{\partial N(\beta,\gamma)}{\partial\gamma}\Lambda(\gamma)-N(\beta,\gamma)\frac{d\Lambda}{d\gamma}\right]_a^b$$

$$+\int_a^b N(\beta,\gamma)\left(\frac{d^2\Lambda}{d\gamma^2}+\{h-n(n+1)[k\,\mathrm{sn}(\gamma,k)]\}\Lambda\right)d\gamma,$$

由此可知 $\int_a^b N(\beta,\gamma)\,\Lambda(\gamma)\,d\gamma$ 將为 Lamé 方程的一个解，只要“積出部分”$[\cdots]_a^b$ 等于零.

設 $h=a_n^m$ 或 b_n^m，并設 $\Lambda(\gamma)=E_n^m(\gamma)$ 是周期为 $2K$ 或 $4K$ 的一个解，对应于 h；又設 $N(\beta,\gamma)$是(41)的一个解，它同时是 β 及 γ mod 4K 的一个周期函数．則根据我們的論断，可知

$$\int_{-2K}^{2K} N(\beta,\gamma)\,E_n^m(\gamma)\,d\gamma$$

是 Lamé 方程的一个解，周期 mod 4K，屬于 $E_n^m(\gamma)$所屬的同一特征值．如 n 不为整数，或者 n 为整数而 $m\leqslant n$，因此 $E_n^m(\gamma)$ 是一 Lamé 多項式，則 $E_n^m(\gamma)$ 是(42)式的唯一周期解，并得 E_n^m 的積分方程

$$(44)\quad \int_{-2K}^{2K} N(\beta,\gamma)\, E_n^m(\gamma)\, d\gamma = \lambda_n^m E_n^m(\beta),$$

$n=0, 1, 2, \cdots,\ m=0, 1, \cdots, n$

或 n 不为整数，$m=0, 1, \cdots$

如果 n 为非負整数而 $m>n$, 則 Lamé 方程具有二个不同的周期解，積分將为 $\mathrm{Ec}_n^m(\beta)$ 及 $\mathrm{Es}_n^m(\beta)$ 的一个綫性組合．在这种情况下，我們可得二个不同周期解的積分方程，但这二个不同周期解不一定是 Ec_n^m 及 Es_n^m. 不过，$\mathrm{Ec}_n^m(\mathrm{Es}_n^m)$ 的積分方程可以 $N(\beta,\gamma)$ 作为 $\beta-\mathbf{K}$ 的偶(奇)函数而求得．

適当的核 $N(\beta,\gamma)$ 的構造可借下面的說明來簡化：引入新的自变量 θ, ϕ, 滿足条件

$$(45)\quad \sin\theta\cos\phi = k\,\mathrm{sn}\,\beta\,\mathrm{sn}\,\gamma,$$

$$\sin\theta\sin\phi = i\frac{k}{k'}\mathrm{cn}\,\beta\,\mathrm{cn}\,\gamma,$$

$$\cos\theta = \frac{1}{k'}\mathrm{dn}\,\beta\,\mathrm{dn}\,\gamma,$$

則从 15–1(16) 及 15–1(18) 式可知偏微分方程 (41) 將变为球面調和函数的偏微分方程，因此，$N(\beta,\gamma)$ 就是球面調和函数偏微分方程的任一解，以球錐坐标表示．如 n 为一整数，$N(\beta,\gamma)$ 是一(正規的)球面調和函数，因此(根据 15–1–2 節)也是一(正規的)橢球面調和函数，所有屬于 N 的非零 λ_n^m 的特征函数都是 Lamé 多項式．

几个簡單的核及其特征函数(把核的对称当作 β 的及 $\beta-\mathbf{K}$ 的函数來确定的)列在下面：

$$(46)\quad N = P_n(\cos\theta) = P_n\left(\frac{1}{k'}\mathrm{dn}\,\beta\,\mathrm{dn}\,\gamma\right) \qquad (\mathrm{Ec}_n^{2m}).$$

$$(47)\quad N = P_n'(\cos\theta)\cos\phi = k\,\mathrm{sn}\,\beta\,\mathrm{sn}\,\gamma\, P_n'\left(\frac{1}{k'}\mathrm{dn}\,\beta\,\mathrm{dn}\,\gamma\right),$$

$$(\mathrm{Ec}_n^{2m+1}).$$

(48) $N = P_n^1(\cos\theta)\sin\phi = i\frac{k}{k'}\operatorname{cn}\beta\operatorname{cn}\gamma\, P_n'\left(\frac{1}{k'}\operatorname{dn}\beta\operatorname{dn}\gamma\right)$, (Es_n^{2m}).

(49) $N = P_n^2(\cos\theta)\sin(2\phi) = 2i\frac{k^2}{k'}\operatorname{sn}\beta\operatorname{sn}\gamma\operatorname{cn}\beta\operatorname{cn}\gamma$

$\times P_n''\left(\frac{1}{k'}\operatorname{dn}\beta\operatorname{dn}\gamma\right)$, (Es_n^{2m+1}).

如 n 为一整数，核 (46)-(49) 的特征函数都是 Lamé 多項式；適用于超越 Lamé 函数的核包含 Q_n. 应当指出，包含 $k\operatorname{sn}\beta\operatorname{sn}\gamma$ 或 $i(k/k')\operatorname{cn}\beta\operatorname{cn}\gamma$ 的 Legendre 函数的其他簡單核也是巳知的.

15-5-4. 退化情形

如 $k=0$, Lamé 方程变为

(50) $\frac{d^2\Lambda}{dz^2} + h\Lambda = 0$,

$\mathbf{K} = \frac{1}{2}\pi$, 滿足 (3)-(6) 的方程 (50) 的解为

(51) $\mathrm{Ec}_n^m(z, 0) = \cos[m(z - \frac{1}{2}\pi)]$,

$\mathrm{Es}_n^m(z, 0) = \sin[m(z - \frac{1}{2}\pi)]$.

这二解都屬于特征值

(52) $a_n^m(0) = b_n^m(0) = m^2$.

如 $k=1$, 則从 13-18 (4) 式可知 Lamé 方程变为

(53) $\frac{d^2\Lambda}{dz^2} + [h - n(n+1)(\tanh z)^2]\Lambda = 0$,

且 $\mathbf{K} = \infty$, $\mathbf{K}' = \frac{1}{2}\pi$. 在这种情形下, Ince (1940 a) 曾証明

(54) $a_n^{2m}(1) = b_n^{2m+1}(1) = (4m+1)n - 4m^2$,

$a_n^{2m+1}(1) = b_n^{2m+2}(1) = (4m+3)n - (2m+1)^2$,

(55) $\mathrm{Ec}_n^{2m}(z, 1) = \mathrm{Es}_n^{2m+1}(z, 1) = P_n^{n-2m}(\tanh z)$,

$\mathrm{Ec}_n^{2m+1}(z, 1) = \mathrm{Es}_n^{2m+2}(z, 1) = P_n^{n-2m-1}(\tanh z)$.

最后，設 $n\to\infty$, 同时 $k\to 0$, 使得

(56)　$n(n+1)k^2 \to -4\theta.$

在这种情形下 $\operatorname{sn}(z, 0) = \sin z$，而且从 15–2(4) 有 $\zeta = \frac{1}{2} - z$. 方程 15–2 (5) 变为

$$(57)\quad \frac{d^2\Lambda}{d\zeta^2} + [h + 4\theta(\cos\zeta)^2]\,\Lambda = 0.$$

这是 Mathieu 方程的形式. 实周期 Lamé 函数变为 Mathieu 函数:在这一情形下虚周期 $K' = \infty$.

15–6. 拉美–黄格林函数

在 15–1–3 節中,我們已經看到;在 Wangerin 的坐标系中列出的某些势問題可以導出在 Lamé 方程二奇点上保持有限的假設解. 現在我們要証明,这样的解僅在 h 的某些特征値下才是可能的:我們把由此而得的特征解称为**有限 Lamé 函数**或 **Lamé-Wangerin 函数**,以区别于上几節中所討論的周期 Lamé 函数. 关于 Lamé-Wangerin 函数,所知还比較少,这里所列的大部分材料都取自 Erdélyi 的一篇論文 (1948 a) 及其未刊布的作品.

Lamé-Wangerin 函数是 Lamé 方程 15–2(1) 的一个解,它的性質是: $(\operatorname{sn} z)^{1/2}\Lambda(z)$ 在包含 $\operatorname{sn} z$ 的至少二个極点的区域中保持有界. 更精确地説,一个 Lamé-Wangerin 函数將以 $F_n^m(z, k^2)$ 表示,对于这一函数来説,$(\operatorname{sn} z)^{1/2}F_n^m(z, k^2)$ 在开区間 $(iK', 2K+iK')$ 上有界,而且在其上恰有 m 个零点;因此,$(\operatorname{sn} z)^{1/2}F_n^m(z, k^2)$ 在包含这一区間的区域上也有界,当然在包含直綫 $z = iK' + 2Kt$, $-\infty < t < \infty$ 的無限帶域上有界. 屬于 F_n^m 的 h 的特征値記为 $c_n^m(k^2)$.

設 k 及 n 均为已知,而且对于实数 t, 使得

$$n(n+1)[kK \operatorname{sn}(iK' + 2Kt, k^2)]^2$$

是实数,因此,如 Lamé 微分方程 15–2 (1) 用 t 作为自变数表示时,將具有实系数. 命 $\operatorname{Re} n \geqslant -\frac{1}{2}$ 当不失一般性. 上面的假設在 $0 < k < 1$ 及 $n(n+1)$ 为实数时恆得到滿足,但从 15–1(33) 式可知

复数 k 的情形也是会有的．从 13-23(13) 及 13-22 節的表 11 很容易証明 15-1(33)式中的函数满足上面的实数性条件．

如果 $F(z)$ 是一 Lamé-Wangerin 函数，則函数

$$F(2\mathbf{K}+2i\mathbf{K}'-z) \text{ 及 } F(z)\pm F(2\mathbf{K}+2i\mathbf{K}'-z)$$

也是 Lamé-Wangerin 函数，因此，我們对 Lamé-Wangerin 函数的討論可以只限于 $z-\mathbf{K}-i\mathbf{K}'$ 的偶函数或奇函数．如 $F_n^m(z,k^2)$ 为这样的一个函数，則它將根据 m 是偶数或奇数而是 $z-\mathbf{K}-i\mathbf{K}'$ 的偶函数或奇函数．由此，可得下列边界条件：

(1) $(\operatorname{sn} z)^{\frac{1}{2}}\Lambda(z)$，在 $z=i\mathbf{K}'$ 上有界

$$\Lambda'(\mathbf{K}+i\mathbf{K}')=0,\ \Lambda=F_n^{2m}(z).$$

(2) $(\operatorname{sn} z)^{\frac{1}{2}}\Lambda(z)$，在 $z=i\mathbf{K}'$ 上有界

$$\Lambda(\mathbf{K}+i\mathbf{K}')=0,\ \Lambda=F_n^{2m+1}(z).$$

由于 $z=i\mathbf{K}'$ 是 Lamé 方程的一个奇点，因此 Lamé-Wangerin 函数的存在和性質应从奇異的 Sturm-Liouville 理論中導出．不过，$z=i\mathbf{K}'$ 上奇点的本質以及这一点上边界条件的本質使我們能夠应用最簡單形式的奇異 Sturm-Liouville 理論，这种最簡單形式仍保持有正規理論的所有实际特色．从 McCrea 及 Newing(1933) 的論文中可知，对于每一个 $m=0,1,\cdots$，恰巧有一个 Lamé-Wangerin 函数，屬于这些函数的 $\mathbf{K}^2h$ 的特征值組成一遞增無界序列，

(3) $\mathbf{K}^2c_n^0\leqslant\mathbf{K}^2c_n^1\leqslant\mathbf{K}^2c_n^2\leqslant\cdots,$ 当 $m\to\infty$ 时，$\mathbf{K}^2c_n^m\to\infty.$

如果 $\operatorname{Re} n>-\frac{1}{2}$，或 $n=-\frac{1}{2}$，則沒有二个 Lamé-Wangerin 函数屬于同一个特征值，而且有如下的嚴格遞增序列：

(4) $\mathbf{K}^2c_n^0<\mathbf{K}^2c_n^1<\mathbf{K}^2c_n^2<\cdots,$ $\operatorname{Re} n>-\frac{1}{2}$ 或 $n=-\frac{1}{2}.$

如果 $0<k<1$，因此 K 是实数，c_n^m 本身都是实数，并有

(5) $c_n^0<c_n^1<c_n^2<\cdots,\ c_n^m\to\infty,$ $0<k<1,\ n\geqslant-\frac{1}{2}.$

对于 Lamé-Wangerin 函数的構造，15-4 節所列的 P-符号提供了形如 15-3(10) 的很多展开式．下面我們將給出 s 的降冪

級数，它在 $0<k<1$ 上收斂.

任一 Lamé-Wangerin 函数在 $s=\infty$ 上屬于 15–4(2) 中的指数 $\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}$，15–3(10) 式提出了 s^{-2} 的冪級数，乘以 $s^{-n-1-2\rho-2\sigma}c^{2\rho}d^{2\sigma}$，此处 ρ 及 σ 的值为 0 及 $\frac{1}{2}$. 顯然，对于 F_n^{2m}，$\sigma=0$，而对于 F_n^{2m+1}，則 $\sigma=\frac{1}{2}$. 从而得冪級数

(6) $$F_n^{2m}(z)=\sum_{r=0}^{\infty}A_r s^{-n-2r-1}=c\sum_{r=0}^{\infty}C_r s^{-n-2r-2}.$$

(7) $$F_n^{2m+1}(z)=d\sum_{r=0}^{\infty}A_r s^{-n-2r-2}=cd\sum_{r=0}^{\infty}D_r s^{-n-2r-3}.$$

系数的遞推关系为 $(r=1, 2, 3, \cdots)$：

(8) $$[h-(n+1)^2(1+k^2)]A_0+2(2n+3)k^2A_1=0,$$
$$(n+2r-1)(n+2r)A_{r-1}+[h-(n+2r+1)^2(1+k^2)]A_r$$
$$+2(r+1)(2n+2r-3)k^2A_{r+1}=0.$$

(9) $$[h-(n+2)^2-(n+1)^2k^2]B_0+2(2n+3)k^2B_1=0,$$
$$(n+2r)(n+2r+1)B_{r-1}+[h-(n+2r+2)^2$$
$$-(n+2r+1)^2k^2]B_r+2(r+1)(2n+2r+3)k^2B_{r+1}=0.$$

(10) $$[h-(n+1)^2-(n+2)^2k^2]C_0+2(2n+3)k^2C_1=0,$$
$$(n+2r)(n+2r+1)C_{r-1}+[h-(n+2r+1)^2$$
$$-(n+2r+2)^2k^2]C_r+2(r+1)(2n+2r+3)k^2C_{r+1}=0.$$

(11) $$[h-(n+2)^2(1+k^2)]D_0+2(2n+3)k^2D_1=0,$$
$$(n+2r+1)(n+2r+2)D_{r-1}+[h-(n+2r+2)^2(1+k^2)]D_r$$
$$+2(r+1)(2n+2r+3)k^2D_{r+1}=0.$$

这些遞推关系式在除以 $4r^2$ 以后，每一式都变成 15–3(13) 的形式. 在所有四种情形下，$\alpha=1$，$\beta=-(1+k^2)$，$\gamma=k^2$，二次方程 15–3 (15) 的根为 $t_1=1$，$t_2=k^{-2}$. 对于 h 的一般值，二相隣系数之比趋近于 k^{-2}，級数 (6)，(7) 在 $z=\mathbf{K}+i\mathbf{K}'$ 上並不收斂，此处 $s^{-2}=k^2$. 如果 h 取其特征值之一，則二相隣系数之比趋近于 1，級数在包含整个直綫 $\operatorname{Im} z=\mathbf{K}'$ 的区域 $|s|>1$ 上收斂.

当 $|k|=1$，即在 15-1-3 節的 III 情形下，級数 (6)，(7)并不適用。在这一情形下，可用类似于 c 的降冪級数較为方便.

在数値計算上較为適用的級数可从 P-符号 15-4(4)，(5)，(6) 導出．在 $z=i\mathrm{K}'$ 处，$c/s=-i$，Lamé-Wangerin 函数屬于 15-4(6) 中 $c/s=-i$ 上的指数 $\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}$，而 15-3(10)式提出了 $(c+is)/(c-is)=(c+is)^2$ 的冪級数，乘以

$$\left(\frac{c+is}{c-is}\right)^{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}}\left(\frac{c-ik's}{c-is}\right)^{\rho}\left(\frac{c+ik's}{c-is}\right)^{\sigma},$$

此处 ρ 及 σ 的值为 0 或 $\frac{1}{2}$. 顯然，m 为偶数时 $\rho=\sigma=0$，m 为奇数时 $\rho=\sigma=\frac{1}{2}$. 此外，如像 15-5(13) 中一样，引入 ζ，則

(12) $\quad \operatorname{sn} z=\cos\zeta,\ \operatorname{cn} z=\sin\zeta,\ c+is=\pm ie^{\mp i\zeta}.$

从而得另外的展开式：

$$(13)\quad F_n^{2m}(z)=\sum_{r=0}^{\infty}A_r\exp[-(n+2r+1)\zeta i],$$

$$(14)\quad F_n^{2m+1}(z)=\operatorname{dn} z\sum_{r=0}^{\infty}B_r\exp[-(n+2r+2)\zeta i],$$

其系数滿足如下的遞推关系：

$$(15)\quad \begin{aligned}&[H-(n+1)^2(2-k^2)]A_0+(2n+3)k^2A_1=0,\\&(2r-1)(n+r)k^2A_{r-1}+[H-(n+1+2r)^2(2-k^2)]A_r\\&\quad+(r+1)(2n+2r+3)k^2A_{r+1}=0.\end{aligned}$$

$$(16)\quad \begin{aligned}&[H-(n+2)^2(2-k^2)]B_0+(2n+3)k^2B_1=0,\\&(2r+1)(n+r+1)k^2B_{r-1}+[H-(n+2r+2)^2(2-k^2)]B_r\\&\quad+(r+1)(2n+2r+3)k^2B_{r+1}=0.\end{aligned}$$

此处 $H=2h-n(n+1)k^2$，$r=1, 2, 3, \cdots$.

这些遞推关系在除以 $2r^2$ 以后变成 15-3(13) 式的形式，此处 $\alpha=\gamma=k^2$，$\beta=-2(2-k^2)$，二次方程 15-3(15) 的根为

$$t_1=\frac{1-k'}{1+k'},\qquad t_2=\frac{1+k'}{1-k'}.$$

如 $\operatorname{Re} k'>0$, 則 $|t_1|<|t_2|$. 考察級数 (13), (14) 在 $0<k, k'<1$ 时的收斂性. 如 $z=iK'+u$, $0\leqslant u\leqslant K$, 則从 13–18 節的表 7 可知

$$c+is=\frac{ik \operatorname{sn} u}{1+\operatorname{dn} u},$$

因此 $|c+is|^2\leqslant(1-k')/(1+k')$, 如 h 取其特征値之一, (13) 或 (14) 的二相隣系数之比趋近于 $t_1=(1-k')/(1+k')$, 因此 (13) 或 (14) 式在直綫 $\operatorname{Im} z=K'$ 上的收斂性至少应与公比为 $[(1-k')/(1+k')]^2$ 的几何級数一样. 注意

$$e^{-iu}=-i(c+is)=\frac{k \operatorname{sn} u}{1+\operatorname{dn} u}$$

在直綫 $\operatorname{Im} z=K'$ 上是实数.

其它的冪級数展开式, 指数函数級数以及 Legendre 函数級数可用 15–3 及 15–4 節的方法求得.

Lamé-Wangerin 函数的積分方程完全可用周期 Lamé 函数的同样方法求得. 像在 15–5–3 節一样, 設 $N(\beta, \gamma)$ 満足偏微分方程 15–5 (41), 考察積分

$$\int_{iK'}^{2K+iK'} N(\beta, \gamma) F_n^m(\gamma)\, d\gamma.$$

15–5 (43) 式中的計算表明: 这一積分満足 $h=c_n^m$ 的 Lamé 方程, 只要核的选擇使 $\gamma\to iK'$ 或 $\gamma\to 2K+iK'$ 时

$$N(\beta, \gamma)\frac{dF_n^m(\gamma)}{d\gamma}\to 0, \quad \frac{\partial N(\beta, \gamma)}{\partial \gamma} F_n^m(\gamma)\to 0.$$

此外, 如 $N(\beta, \gamma)$ 屬于 $\beta=iK'$ 及 $\beta=2K+iK'$ 上的指数 $\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}$, 在積分区間内对于所有的 γ 一致, 則上述積分就是 Lamé-Wangerin 函数的一个常数倍数, 从此得積分方程

$$(17) \qquad \int_{2K'}^{2K+iK'} N(\beta, \gamma) F_n^m(\gamma)\, d\gamma=\lambda_n^m F_n^m(\beta).$$

適当核 $N(\beta, \gamma)$ 的構造, 將以变数变換 15–5 (45) 把 15–5 (41) 变換为球面調和函数的偏微分方程为根据. 应当指出, (見 13 25

節的圖),在区間$(iK', 2K+iK')$上,s是正的,c是負的虛数,d是实数,因此在 15-5 (45) 中

(18) $\cos\theta$ 实数, $\sin\theta\cos\phi>0$, $i\sin\phi\sin\theta>0$.

对于每一个充分正則的函数 f, 以及每一个常数 α,

$$f(x\cos\alpha+y\sin\alpha-iz)$$

是 Laplace 方程的一个解(笛卡尔坐标 x, y, z), 可取 $f(u)=u^{-n-1}$, 于是

(19) $$(\sin\theta\cos\phi\cos\alpha+\sin\theta\sin\phi\sin\alpha-i\cos\theta)^{-n-1}$$
$$=\left(k\,\mathrm{sn}\,\beta\,\mathrm{sn}\,\gamma\cos\alpha+i\frac{k}{k'}\mathrm{cn}\,\beta\,\mathrm{cn}\,\gamma\sin\alpha-\frac{i}{k'}\mathrm{dn}\,\beta\,\mathrm{dn}\,\gamma\right)^{-n-1}$$

是一面調和函数,只要 α 的选擇可使括号內的表达式在 β 及 γ 取值于区間 $(iK', 2K+iK')$时不等于零. 不僅如此,当 β 或 γ 趋近于这一区間的一个端点时, N, $\partial N/\partial\gamma\to 0$, 因此 (19) 就表示適当的核. 特别是,令 $\alpha=\pm\frac{1}{2}\pi$, 則得積分方程

(20) $$\int_{iK'}^{2K+iK'}(\pm\mathrm{dn}\,\beta\,\mathrm{dn}\,\gamma-k\,\mathrm{cn}\,\beta\,\mathrm{cn}\,\gamma)^{-n-1}F_n^m(\gamma)d\gamma=\lambda_n^m f_n^m(\beta).$$

我們也可以構作只是偶 Lamé-Wangerin 函数或奇 Lamé-Wangerin 函数[在区間$(iK', K+iK')$上]的積分方程. 可用的核是(20)式中二核之和或差.

15-7. 橢球与球錐調和函数

下面我們將簡單地介紹一下上述結果在橢球及球錐調和函数構造上的应用.

用**橢球面坐标** α, β, γ 代替直角坐标 x, y, z. 变換公式为 15-1(8), α,β,γ 的取值范圍見 15-1 (9)式下面的說明. 如果有函数 $B(\beta)\,C(\gamma)$, 其中 B 及 C 滿足 Lamé 方程, 在所有的橢球面 $\alpha=$const. 上 BC 連續而具有連續的梯度,則称 $B(\beta)\,C(\gamma)$ 为**橢球面調和函数**. 我們称 $A(\alpha)\,B(\beta)\,C(\gamma)$为**內橢球面調和函数**,如果 A, B, C 滿足 Lamé 方程,而 ABC 在橢球 $\alpha=$const. 的**內部**

連續并具有連續導数．我們称 $A(\alpha)\,B(\beta)\,C(\gamma)$ 为**外橢球面調和函数**，如果上述条件成立在橢球面的外部，且 $A(iK')=0$.

在 15-1-1 節中已經証明，对于一个橢球面調和函数，必須有 $B(\theta)=C(\theta)$，而且这一函数应当是双周期 Lamé 函数，周期为 $4K$ 及 $4iK'$．根据 15-5-2 節可知，周期为 $4K$ 及 $4iK'$ 的唯有的 Lamé 函数都是 Lamé 多項式，对于这些多項式來說，n 应为整数，我們可把 n 取为非負整数，且 $m\leqslant n$．于是得 $2n+1$ 个 **n 次橢球面調和函数**:

$$
\text{(1)}\qquad \mathrm{Sc}_n^m(\beta,\gamma)=\mathrm{Ec}_n^m(\beta)\,\mathrm{Ec}_n^m(\gamma),\ n=0,1,2,\cdots,\ m=0,1,\cdots,n.
$$

$$
\mathrm{Ss}_n^m(\beta,\gamma)=\mathrm{Es}_n^m(\beta)\,\mathrm{Es}_n^m(\gamma),\ n=1,2,3,\cdots,\ m=1,2,\cdots,n.
$$

这些函数用 15-5 (45) 的变数 $\theta,\ \phi$ 表示时成为球面調和函数，$2n+1$ 个綫性独立的面調和函数就可根据上述关系來建立.

橢球面調和函数組成一正交系，即

$$
\text{(2)}\qquad \iint_{\mathcal{E}} \mathrm{Sc}_n^m(\beta,\gamma)\,\mathrm{Sc}_\nu^\mu(\beta,\gamma)\left[(\mathrm{sn}\,\beta)^2-(\mathrm{sn}\,\gamma)^2\right]d\beta\,d\gamma
$$

$$
=\iint_{\mathcal{E}} \mathrm{Ss}_n^m(\beta,\gamma)\,\mathrm{Ss}_\nu^\mu(\beta,\gamma)\left[(\mathrm{sn}\,\beta)^2-(\mathrm{sn}\,\gamma)^2\right]d\beta\,d\gamma=0,
$$

除非 $n=\nu$ 及 $m=\mu$，且

$$
\text{(3)}\qquad \iint_{\mathcal{E}} \mathrm{Sc}_n^m(\beta,\gamma)\,\mathrm{Ss}_\nu^\mu(\beta,\gamma)\left[(\mathrm{sn}\,\beta)^2-(\mathrm{sn}\,\gamma)^2\right]d\beta\,d\gamma=0.
$$

此处 $\mathcal{E}$ 表示橢球面，在其上 β 由 K 变化至 $K+2iK'$，γ 由 0 变化至 $4K$．方程(3)可从 Sc 及 Ss 在 $\gamma=K$ 上的不同宇称來推出．为了証明 $n\neq\nu$ 时的 (2)，注意:

$$
\left(\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}-\frac{\partial^2}{\partial\gamma^2}\right)\mathrm{S}_n=n(n+1)\left[(k\,\mathrm{sn}\,\beta)^2-(k\,\mathrm{sn}\,\gamma)^2\right]\mathrm{S}_n
$$

其中 S_n 代表 $\mathrm{Sc}_n^m(\beta,\gamma)$ 或 $\mathrm{Ss}_n^m(\beta,\gamma)$，因此

$$\mathrm{S}_\nu\left(\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}-\frac{\partial^2}{\partial\gamma^2}\right)\mathrm{S}_n-\mathrm{S}_n\left(\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}-\frac{\partial^2}{\partial\gamma^2}\right)\mathrm{S}_\nu$$
$$=[n(n-1)-\nu(\nu-1)]k^2[(\operatorname{sn}\beta)^2-(\operatorname{sn}\gamma)^2]\mathrm{S}_n\mathrm{S}_\nu.$$

过 $\mathfrak{E}$ 積分，得

$$[n(n-1)-\nu(\nu-1)]\iint_{\mathfrak{E}}[(\operatorname{sn}\beta)^2-(\operatorname{sn}\gamma)^2]\mathrm{S}_n\mathrm{S}_\nu\,d\beta\,d\gamma=0.$$

这証明了 $n\neq\nu$ 时的式(2)．对于 $n=\nu$ 及 $m\neq\mu$，注意 Ec_n^m 及 Ec_n^μ（同样，Es_n^m 及 Es_n^μ）是同一个 Sturm-Liouville 問題 15-5 (1) [或 15-5 (2)] 的二个特征函数，根据 15-5(9) [及 15-5(10)]，它們屬于不同的特征值．因此，在 $n=\nu$, $m\neq\mu$ 情形下的方程 (2)，可从 Sturm-Liouville 函数的正交性質中推出．

橢球面調和函数的正交性質使我們能以确定一个給定在 $\mathfrak{E}$ 上的任意函数展为橢球面調和函数的級数时的系数．应用橢球面調和函数及球面調和函数之間的关系，可以推証展开式的真确性．

对于內橢球調和函数，在 15-1-1 節中已經指出，$A(\theta)=B(\theta)=C(\theta)$，因此它具有如下形式之一：

(4) $$\mathrm{Hc}_n^m(\alpha,\beta,\gamma)=\mathrm{Ec}_n^m(\alpha)\,\mathrm{Ec}_n^m(\beta)\,\mathrm{Ec}_n^m(\gamma),$$
$$n=0,1,2,\cdots,\ m=0,1,2,\cdots,n.$$
$$\mathrm{Hs}_n^m(\alpha,\beta,\gamma)=\mathrm{Es}_n^m(\alpha)\,\mathrm{Es}_n^m(\beta)\,\mathrm{Es}_n^m(\gamma),$$
$$n=1,2,3,\cdots,\ m=1,2,\cdots,n.$$

此处的 Lamé 多項式可寫成 $s^\rho c^\sigma d^\tau$ 乘以 s^2 的 $\frac{1}{2}(n-\rho-\sigma-\tau)$ 次多項式的形式，因此 Hc_n^m 及 Hs_n^m 都是笛卡尔坐标 x, y, z 中的 n 次多項式（調和多項式）．

E. T. Whittaker (Whittaker 及 Watson, 1927, 23-62 節) 求得了內橢球調和函数的積分表示式如下：

(5) $$\int_0^{4K}P_n(w)\,\mathrm{Ec}_n^m(\tau)\,d\tau=\lambda\,\mathrm{Hc}_n^m(\alpha,\beta,\gamma),$$
$$\int_0^{4K}P_n(w)\,\mathrm{Es}_n^m(\tau)\,d\tau=\lambda\,\mathrm{Hs}_n^m(\alpha,\beta,\gamma),$$

其中

$$(6)\qquad w=\frac{k'x\operatorname{sn}\tau+y\operatorname{cn}\tau-iz\operatorname{dn}\tau}{k'(a^2-c^2)^{1/2}}$$

$$=k^2\operatorname{sn}\alpha\operatorname{sn}\beta\operatorname{sn}\gamma\operatorname{sn}\tau-\frac{k^2}{k'^2}\operatorname{cn}\alpha\operatorname{cn}\beta\operatorname{cn}\gamma\operatorname{cn}\tau$$

$$+\frac{1}{k'^2}\operatorname{dn}\alpha\operatorname{dn}\beta\operatorname{dn}\gamma\operatorname{dn}\tau$$

是單位球面上二点之間的球面距离，这二点的笛卡尔坐标为

$$(7)\qquad \left(k\operatorname{sn}\alpha\operatorname{sn}\beta,\ i\frac{k}{k'}\operatorname{cn}\alpha\operatorname{cn}\beta,\ \frac{1}{k'}\operatorname{dn}\alpha\operatorname{dn}\beta\right)$$

及

$$(8)\qquad \left(k\operatorname{sn}\gamma\operatorname{sn}\tau,\ i\frac{k}{k'}\operatorname{cn}\gamma\operatorname{cn}\tau,\ \frac{1}{k'}\operatorname{dn}\gamma\operatorname{dn}\tau\right).$$

要証明 (5)，注意 $P_n(w)$ 是 Laplace 方程的一个解，(5)式左边的積分也是一个解．此外，这些積分都是 $\operatorname{sn}\alpha$, $\operatorname{sn}\beta$, $\operatorname{sn}\gamma$, $\operatorname{cn}\alpha$, $\cdots$, $\operatorname{dn}\gamma$ 的多項式．最后，作为点 (8)的函数的 $P_n(w)$ 是一 n 次球面調和函数，根据 15–5(44)可知，積分应是 $\mathrm{Ec}_n^m(\gamma)$, $\mathrm{Es}_n^m(\gamma)$ 的倍数，由于 α, β, γ 在 w 中是对称的，故得 (5)．

外橢球調和函数与 (4) 的不同在于：$\mathrm{Ec}_n^m(\alpha)$, $\mathrm{Es}_n^m(\alpha)$ 用对应的第二类 Lamé 函数来代替(見 15–5–1 節末)．这种調和函数也可用如下積分式表示：

$$\int_0^{4K}Q_n(w)\,\mathrm{Ec}_n^m(\tau)\,d\tau,\qquad \int_0^{4K}Q_n(w)\,\mathrm{Es}_n^m(\tau)\,d\tau,$$

式中 Q_n 为第二类 Legendre 函数，w 見 (6)．

在球錐坐标 15–1(16) 中，面調和函数 (1)，如以 β 及 γ 作为球錐坐标，則都是球面調和函数．內球錐調和函数及外球錐調和函数分別为：

$$r^n\mathrm{Sc}_n^m(\beta,\gamma),\qquad r^n\mathrm{Ss}_n^m(\beta,\gamma)\qquad (\text{內})$$

$$r^{-n-1}\mathrm{Sc}_n^m(\beta,\gamma),\quad r^{-n-1}\mathrm{Ss}_n^m(\beta,\gamma)\quad (\text{外})$$

其中 m 为一非負整数，且 $m<n$.

15-8. 迴轉四次圓紋曲面的連帶調和函数

为了說明 Lamé-Wangerin 函数在構作共焦系迴轉四次圓紋曲面的連帶調和函数上的应用，我們將詳細討論 15-1-3 節中的情形 I，也就是說，要詳細討論在迴轉軸上有四个实焦点的共焦系迴轉四次圓紋曲面．特别是，我們將構作在曲面 $u=\text{const.}>0$ 內部正則的調和函数．

在这种情形下，將 f 的微分方程化成范式須用曲綫坐标 u, v，所用的变换为

$$(1)\qquad z+i\rho=s=\operatorname{sn}(u+iv, k).$$

公式 15-1 (29) 表明分离变数后所得之常微分方程为：

$$(2)\qquad \frac{d^2U}{du^2}-(1+k)^2\left\{h-(m^2-\tfrac{1}{4})\left[\frac{1-k}{1+k}\operatorname{sn}\left(i(1+k)u, \frac{1-k}{1+k}\right)\right]^2\right\}U=0,$$

$$\frac{d^2V}{dv^2}+(1+k)^2\left\{h-(m^2-\tfrac{1}{4})\left[\frac{1-k}{1+k}\operatorname{sn}\left((1+k)(v-i\mathbf{K}), \frac{1-k}{1+k}\right)\right]^2\right\}V=0.$$

在 15-1-3 節中曾証明，边界条件是：$\rho^{-1/2}V$ 在 $v=0$ 及 $v=\mathbf{K}'$（(2) 的第二个方程在此处有奇点）上都应保持有限，$\rho^{-1/2}U$ 应在 $u=\mathbf{K}$（第一个方程在此有一奇点）上保持有限．

今，方程(2)是 Lamé 方程的形式，所須的解可用 15-6 節方法求得．这一方法在 k 接近于 1（共焦系的二个焦点相互靠近）时很適合；对于 k 的較小值，则处理模为 k 的 Lamé 方程比之处理像 (2) 中的 $(1-k)/(1+k)$ 來得方便．这可用曲綫坐标 u, v 來完成，但这些坐标与 (1) 式中的不同．

由 13-22 節表 11 的变换 B 与 Landen 变换 13-23(13) 的組合中可知

$$\operatorname{sn}(u, k)=-i\operatorname{sc}(iu, k')$$

$$=-\frac{2i}{1+k}\,\frac{\operatorname{sn}(\dot{u}, \dot{k})}{\operatorname{cn}(\dot{u}, \dot{k})+\operatorname{dn}(\dot{u}, \dot{k})},$$

其中

$$\dot{k}=i(1+k)u, \quad \dot{u}=\frac{1-k}{1+k},$$

由此知曲綫坐标 u, v 的引進可借助于方程

$$(3) \qquad z+i\rho=\frac{iak's}{c+d}=ia\frac{d-c}{k's}=f(u+iv),$$

其中

$$(4) \qquad s=\mathrm{sn}(u+iv, k),\ c=\mathrm{cn}(u+iv, k),\ d=\mathrm{dn}(u+iv, k),$$

共焦系的焦点

$$z=\pm a\left[\frac{1-k}{1+k}\right]^{1/2}, \quad \pm a\left[\frac{1+k}{1-k}\right]^{1/2}$$

可确定 $a>0$, 及 k, $0<k<1$. 下面的 u, v 是由 (3) 式所引進的曲綫坐标,并应用 15–1 (27) 的简記符号.

应用 13–17 節的公式,可得变换 (3) 的实形式:

$$(5) \qquad z=\frac{iak's_2}{c_1d_2+c_2d_1}, \quad \rho=\frac{ak's_1}{c_1d_2+c_2d_1},$$

又

$$(6) \qquad F(u, v)=\frac{|f'(u+iv)|^2}{\rho^2}=\frac{1-k^2s_1^2s_2^2}{s_1^2}$$

$$=\frac{1}{s_1^2}-k^2s_2^2=[k\,\mathrm{sn}(u+i\mathbf{K}', k)]^2-[k\,\mathrm{sn}(iv, k)]^2.$$

U 及 V 的常微分方程变为

$$(7) \qquad \frac{d^2U}{du^2}+\{h-(m^2-1/4)[k\,\mathrm{sn}(u+i\mathbf{K}', k)]^2\}U=0,$$

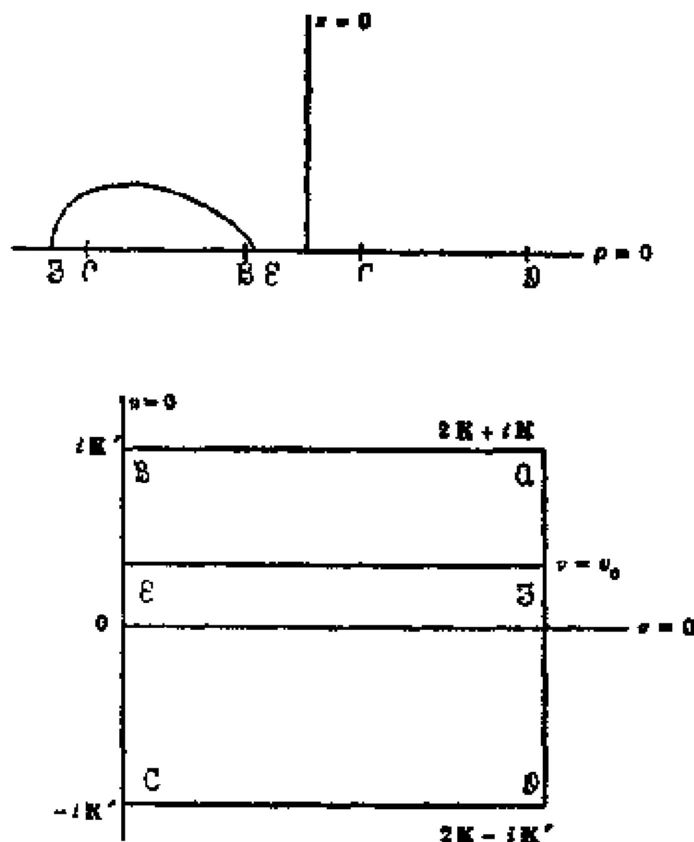
$$(8) \qquad -\frac{d^2V}{dv^2}+\{h-(m^2-1/4)[k\,\mathrm{sn}(iv, k)]^2\}V=0.$$

变换 (3) 将 u, v 平面上頂点为 $\pm i\mathbf{K}'$, $2\mathbf{K}\pm i\mathbf{K}'$ 的矩形映成半平面 $\rho>0$. 在下面的圖中,对应的点以同一字母表示. 直綫 $v=v_0>0$ 被映成一部分重圓点四次綫,其焦点 A 及 B, 就是点 $z=-a[(1-k)/(1+k)]^{1/2}$, $z=-a[(1+k)/(1-k)]^{1/2}$, $\rho=0$,

現在我們來構作在这一重圓点四次綫內部正則的調和函数. $\rho^{-1/2}UV$ 应在 $v=v_0$ 內部的迴轉軸上保持有界的条件引導出条件: $[\mathrm{sn}\,(u+i\mathbf{K}', k)]^{1/2}\,U(u)$ 应在区間 $(0, 2\mathbf{K})$ 上保持有界, $[\mathrm{sn}\,(iv, k)]^{1/2}\,V(v)$ 应在区間 $(v_0, \mathbf{K}')$ 上保持有界.

微分方程 (7) 是一 Lamé 方程,其中 $n=m-\frac{1}{2}$, $z=u+i\mathbf{K}'$. 使 $(\mathrm{sn}\,z)^{1/2}\,U(u)$ 在 $z=i\mathbf{K}'$ 及 $z=2\mathbf{K}+i\mathbf{K}'$ 上有界的解当且僅当 $h=c^r_{m-1/2}(k^2)$ 时存在,而唯有的这种解为

$$U(u)=F^r_{m-1/2}(u+i\mathbf{K}', k^2), \qquad r=0, 1, 2, \cdots$$



在方程 (8) 中,現在 $h=c^r_{m-1/2}(k^2)$, 因此这一方程的一个解是

$$V(v)=F^r_{m-1/2}(iv, k^2).$$

此外,这一解的性質是使 $[\mathrm{sn}\,(iv, k)]^{1/2}\,V(v)$ 在 $v=i\mathbf{K}'$ 上有界,而且除常数因子外,可以这一性質來确定. 因此方程 15-1(24) 表明, 在(3) 式所引進的曲綫坐标系中, Laplace 方程唯有的正規解形为

$$(9)\qquad W_{m,r}=\left(\frac{c_1d_2+c_2d_1}{s_2}\right)^{1/2}F^r_{m-1/2}(u+iK', k^2)\times F^r_{m-1/2}(iv, k^2)\, e^{\pm im\phi},$$

$$m=0, 1, 2, \cdots,\quad r=0, 1, 2, \cdots.$$

在共焦迴轉四次圓紋曲面坐标中的其他势問題可同样处理。由于在这一科目的文献中尙沒有一定明确，因此，应当指出，沒有一个 15-1-3 節中的边値問題（实际上 Wangerin 坐标中沒有一个已知的边値問題）可導出代数 Lamé 函数（虽然这样的函数对某些 h 値說是存在的，因为 $n+\frac{1}{2}$ 是一整数）。除了 Poole (1929, 1930) 所討論的平环的調和函数（他証明这些函数与周期 Lamé 函数有关）之外，所有 15-1-3 節的其他边値問題都包含有限的 Lamé 函数（即，Lamé-Wangerin 函数）。

参 考 文 献

Bôcher, Maxim, 1891: *Über die Reihenentwicklungen der Potentialtheorie.* Göttingen, B. G. Teubner.

Eisenhart, L. P., 1934: *Ann. Math.* 35, 284-305.

Erdélyi, Arthur, 1941 a: *Philos. Mag.* (7) 31, 123-130.

Erdélyi, Arthur, 1941 b: *Philos. Mag.* (7) 32, 348-350.

Erdélyi, Arthur, 1942: *Duke Math. J.* 9, 48-58.

Erdélyi, Arthur, 1942 a: *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 38, 364-367.

Erdélyi, Arthur, 1942 b: *Quart. J. Math. Oxford Ser.* 13, 107-112.

Erdélyi, Arthur, 1943: *Proc. Edinburgh Math. Soc.* (2) 7, 3-15.

Erdélyi, Arthur, 1944: *Quart. J. Math. Oxford Ser.* 15, 62-69.

Erdélyi, Arthur, 1948: *Proc. Royal Soc. Edinburgh Sect. A.* 62, 247-267.

Erdélyi, Arthur, 1948 a: *J. London Math. Soc.* 23, 64-69.

Heun, Karl, 1889: *Math. Ann.* 33, 161-179, 180-196.

Hobson, E. W., 1892: *Proc. London Math. Soc.* 23, 231-240.

Hobson, E. W., 1931: *The theory of spherical and ellipsoidal harmonics.* Cambridge University Press.

Ince, E. L., 1922: *Proc. Royal Soc. Edinburgh* 42, 43-53.

Ince, E. L., 1927: *Ordinary differential equations.* Longmans.

Ince, E. L., 1932: *Proc. Royal Soc. Edinburgh* 52, 355-433.

Ince, E. L., 1940 a: *Proc. Royal Soc. Edinburgh* 60, 47-63.

Ince, E, L., 1940 b: *Proc. Royal Soc. Edinburgh* 60, 83-99.

Lagrange, René, 1939: *Acta Math.* 71, 283-315.

Lagrange, René, 1944: *Bull. Soc. Math. France* 72, 169-177.

Lambe, C. G., 1951: *Quart. J. Math. Oxford Ser.* (2) 2, 53-59.

Lambe, C. G., 1952: *Quart. J. Math. Oxford Ser.* (2) 3, 107-114.

Lambe, C. G. and D. R. Ward, 1934: *Quart. J. Math. Oxford Ser.* 5, 81-97.

Levinson, Norman, B. Bogert and R. M. Redheffer, 1949: *Quart. Appl. Math.* 7, 241-262.

McCrea, W. H. and R. A. Newing, 1933: *Proc. London Math. Soc.* (2), 37, 520-534.

Moon, Parry and D. E. Spencer, 1952 a: *J. Franklin Inst.* 253, 585-600.

Moon, Parry and D. E. Spencer, 1952 b: *J. Franklin Inst.* 254, 227-242.

Moon, Parry and D. E. Spencer, 1953: *Proc. Amer. Math. Soc.* 4, 302-307.

Perron, Oskar, 1929: *Die Lehre von den Kettenbrüchen*. B. G. Teubner, Leipzig.

Poole, E. G. C., 1929: *Proc. London Math. Soc.* (2) 29, 342-354.

Poole, E. G. C., 1930: *Proc. London Math. Soc.* (2) 30, 174-186.

Poole, E. G. C., 1936: *Introduction to the theory of linear differential equations.* Oxford.

Snow, Chester, 1952: *Hypergeometric and Legendre functions with applications to integral equations of potential theory.* National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series 19.

Strutt, M. J. O., 1932: *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*, vol. 1, no. 3, Berlin, Springer.

Svartholm, N., 1939: *Math. Ann.* 116, 413-421.

Wangerin, Albert, 1875: *Reduction der Potentialgleichung für gewisse Rotationskörper auf eine gewöhnliche Differentialgleichung.* S. Hirzel, Leipzig.

Whittaker, E. T., 1915 a: *Proc. Royal Society Edinburgh* 35, 70-77.

Whittaker, E. T., 1915 b: *Proc. London Math. Soc.* (2) 14, 260-263.

Whittaker, E. T., and G. N. Watson, 1927: *Modern Analysis*, 4th edition, Cambridge, University press.

第十六章　馬蒂安函数，

球体及橢球波函数

16 1. 引　言

本章中所討論的是波动方程 $\Delta W+\kappa^2W=0$ 在某些曲綫坐标系中用分离变数法求解时所得的函数．关于波动方程及有关偏微分方程中分离变数法的一般問題可参看 15-1 節中所列的文献．

关于 Mathieu 函数，McLachlan (1947) 所著是一本标准著作，其中包括有很多应用及参考書目，Meixner 及 Schäfke 所寫的一本关于 Mathieu 函数及球体波函数理論和应用的書正在排印中．Strutt (1932)的一篇論文概括了本章所論全部函数的理論，指出了它們的用途，并列出了很多参考文献．Strutt (1935) 还刊布了这一書目的补充．对于 Mathieu 函数，还可参看 Whittaker 及 Watson (1927, 第 19 章)．

在这一章里，我們將概略地說明所論函数的一些主要性質，所提参考資料都是較新的文献．关于这些函数的詳細介紹以及較早的有关文献，可参看上面列举的著作．本章中有关 Mathieu 函数的几節根据 McLachlan 的著作，有关球体波函数的几節則根据 Meixner 的作品．目前对橢球体波函数的所知倘不多，其已知部分都概括在 Strutt 的論文中．

16–1–1. 橢圓柱坐标

我們用下列方程引進曲綫坐标 u, v, 代替直角坐标 x, y,

(1)　　$x=c\cosh u\cos v,\quad y=c\sinh u\sin v,$

其中 c 为一正的常数．在 x, y 平面上，曲綫 $u=\text{const.}$ 組成一族共

焦橢圓，曲綫 $v=\text{const.}$ 組成一族共焦双曲綫，共焦系的焦点为 $(\pm c, 0)$. 每一条曲綫 $v=\text{const.}$ 是一条双曲綫的四分之一，如命 u 及 v 的取值范圍为 $0\leqslant u<\infty$, $0\leqslant v<2\pi$, 則得整个 x, y 平面. $v=0$ 及 $v=2\pi$ 代表的是同一曲綫(卽由 $x=c$ 至 $x=+\infty$ 的 x 軸). 曲綫 $u=0$ 是一退化橢圓(綫段 $-c\leqslant x\leqslant c$ 复盖两次)，可作为一分枝切割，点 $u=0$, $v=v_1$ 及点 $u=0$, $v=2\pi-v_1$ 是叠合的

在 x, y, z 空間，則得对应的橢圓柱及双曲柱共焦族.

在(1)式所定义的坐标系中，

$$\Delta W+\kappa^2 W=\frac{2c^{-2}}{\cosh(2u)-\cos(2v)}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial v^2}\right)+\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}+\kappa^2 W=0; \tag{2}$$

如果这一方程具有形如下式的正規解

$$W=U(u)V(v)Z(z) \tag{3}$$

則函数 U, V, Z 应滿足下列常微分方程:

$$\frac{d^2U}{du^2}-[h-2\theta\cosh(2u)]U=0 \tag{4}$$

$$\frac{d^2V}{dv^2}+[h-2\theta\cos(2v)]V=0 \tag{5}$$

$$\frac{d^2Z}{dz^2}+l^2 Z=0 \tag{6}$$

其中 h, θ 及 l 都是分离常数，h 是任意的，而

$$\kappa^2=l^2+4c^{-2}\theta. \tag{7}$$

方程(5)称为 **Mathieu 方程**；方程(4)經变数的虚变换后也能化成 Mathieu 方程，称为**修正 Mathieu 方程**.

如果波函数 W 在橢圓柱 $u=u_0$ 上連續，并具有連續導数，則必有 $V(2\pi)=V(0)$, $V'(2\pi)=V'(0)$, 由于 2π 是(5)式系数的周期，故知 $V(v)$ 必是 v 的周期函数，其周期为 2π. 下面將会看到，对于一个給定的 θ, 使这种周期函数存在的 h 的特征值組成一無

窮序列；这种函数称为 Mathieu 函数. 如果 $V(v)$ 是(5)的 mod 2π 周期解，則 $V(v)$ 及 $V(v)\pm V(-v)$ 也是同样的解，因此，我們对 Mathieu 函数的研究，可只限于 v 的偶函数或奇函数.

設 W 在椭圓柱 $u=u_0$ 内部連續，并具有連續梯度. 由于 $u=0$, $v=v_1$ 及 $u=0$, $v=2\pi-v_1$ 所代表的是分枝切割相反边上的同一点，故对于 $0\leqslant v_1<2\pi$, 必有

$$U(0)V(v_1)=U(0)V(2\pi-v_1),$$
$$U'(0)V(v_1)=-U'(0)V(2\pi-v_1).$$

如果 $V(v)$ 是一偶 Mathieu 函数，則 $V(2\pi-v_1)=V(-v_1)=V(v_1)$, 这二条件中第一个条件恆滿足，第二个条件要求 $U'(0)=0$. 因此，从(4)可知 $U(u)$ 是 u 的偶函数，除了常数因子外，有 $U(u)=V(iu)$. 同理，如果 $V(v)$ 是 v 的奇函数，則 $U(u)$ 必是 u 的奇函数，仍有 $U(u)=V(iu)$. 这样确定的(4)的解称为第一类修正 Mathieu 函数.

对于一个在椭圓柱 $u=u_0$ 外部連續并具有連續梯度的波函数 W, 在無窮远处的性态一般都是規定的 (例如，滿足 Sommerfeld 輻射条件). 对于大的 u 值，

$$\rho=(x^2+y^2)^{1/2}=c[(\cosh u\cos v)^2+(\sinh u\sin v)^2]^{1/2}$$

近似于 $\frac{1}{2}ce^u$, 方程(4)的那些与 $\exp(\frac{1}{2}i\kappa ce^u)$ 或 $\exp(-\frac{1}{2}i\kappa ce^u)$ 具有相似的漸近性态的解叫做第三类修正 Mathieu 函数.

16-1-2. 長球面坐标

長球面坐标 u, v, ϕ 与直角坐标的关系如下：

(8) $$x=c\sinh u\sin v\cos\phi,\quad y=c\sinh u\sin v\sin\phi,$$
$$z=c\cosh u\cos v,$$

其中 c 为一正的常数. 曲面 $u=\text{const.}$ 組成一共焦長球面系，曲面 $v=\text{const.}$ 組成一共焦双叶双曲面系，共焦系的焦点为 $x=y=0$, $z=\pm c$. u, v, ϕ 的变化范圍为: $0\leqslant u<\infty$, $0\leqslant v\leqslant\pi$, $0\leqslant\phi<2\pi$.

面 $\phi=\text{const.}$ 都是子午平面，$\phi=0$ 及 $\phi=2\pi$ 是同一平面. $u=0$ 是一退化椭球,退化为线段 $x=y=0$, $-c\leqslant z\leqslant c$, 而 $v=0$ 及 $v=\pi$ 是共焦系退化双曲面的二半,分别退化为 $x=y=0$, $z\geqslant c$ 及 $x=y=0$, $z\leqslant -c$. 因此,整个迴轉軸是坐标系的一条奇異綫.

在(8)式的坐标系中,

$$(9)\qquad \Delta W+\kappa^2W=\frac{c^{-2}}{(\cosh u)^2-(\cos v)^2}\left(\frac{\partial^2W}{\partial u^2}+\frac{\partial^2W}{\partial v^2}\right.$$

$$\left.+\operatorname{ctnh}u\frac{\partial W}{\partial u}+\operatorname{ctn}v\frac{\partial W}{\partial v}\right)+\frac{1}{(c\sinh u\sin v)^2}\frac{\partial^2W}{\partial\phi^2}+\kappa^2W=0,$$

如果有正規解为

$$(10)\qquad W=U(u)V(v)e^{\pm im\phi},$$

則函数 U, V 必滿足如下的常微分方程:

$$(11)\qquad \frac{d^2U}{du^2}+\operatorname{ctnh}u\frac{dU}{du}-[h-(\kappa c\sinh u)^2+(m\operatorname{csch}u)^2]U=0$$

$$(12)\qquad \frac{d^2V}{dv^2}+\operatorname{ctn}v\frac{dV}{dv}+[h+(\kappa c\sin v)^2-(m\csc v)^2]V=0$$

其中 h 仍是分离常数. 方程(12)称为球体波函数方程的三角式,方程(11)可借变数的虛变換化成(12)式.

对于一个在球体 $u=u_0$ 内部或外部連續的波函数 W, 它应是 ϕ 的一个周期函数,周期为 2π, 因此,(10)式中的 m 必为一整数. 又, W 在椭球 $u=\text{const.}$ 上应是有界的,也就是說, $V(v)$ 应是(12)式的一个解,在 $0\leqslant v\leqslant\pi$ 上有界. 正像 Legendre 方程 3-1(2) 的情形一样,[方程(12)在 $\kappa=0$ 时即化为 3-1(2)], 这样的解僅在 h 的某些特征值下存在;(12)式的有界解称为**球体波函数**. 如果 W 在球体 $u=u_0$ 内部連續,則它应在退化球体 $u=0$ 上有界;这就确定了 U 的选擇,同时表明: $U(u)$ 是 $V(iv)$ 的常数倍数, 也就是說 $U(u)$ 是一**第一类修正球体波函数**. 反之,如 W 是在球体 $u=u_0$ 外部正則的波函数,則其在無窮远上的性态通常規定为漸近于 $r^{-1}\exp(\pm i\kappa r)$ 的性态,此处

$$r=(x^2+y^2+z^2)^{1/2}=c[(\sinh u\sin v)^2+(\cosh u\cos v)^2]^{1/2},$$

当 u 很大时，近似于 $\frac{1}{2}ce^u$. 方程(11)的解由其無窮远上的性态所确定者称为第三类修正球体波函数. 当 h 取其一特征值时，(11)的解更嚴格地說，应称为長球面的修正波函数.

16-1-3. 扁球面坐标

扁球面坐标 u, v, ϕ 与直角坐标的关系如下：

$$(13)\quad x=c\cosh u\sin v\cos\phi,\quad y=c\cosh u\sin v\sin\phi,\quad z=c\sinh u\cos v$$

其中 c 是一正的常数. 面 $u=\text{const.}$ 組成一共焦扁球面族，面 $v=\text{const.}$ 組成一共焦單叶双曲面族，面 $\phi=\text{const.}$ 是子午面. 共焦系的焦圓为 $x^2+y^2=c^2$, $z=0$. u, v, ϕ 的取值范圍分別为：$0\leqslant u<\infty$, $0\leqslant v\leqslant\pi$, $0\leqslant\phi<2\pi$, $\phi=0$ 及 $\phi=2\pi$ 代表的是同一子午面, $u=0$ 是一退化橢球，复盖焦圓内部的面積二次. $v=0$ 及 $v=\pi$ 是一退化双曲面的二半，分別化为正負 z-軸, $v=\frac{1}{2}\pi$ 是一退化双曲面，位于平面 $z=0$ 上，复盖焦圓外部的面積二次. 因此，整个 x, y 平面是坐标系的一个奇異面.

在(13)式所确定的坐标系中，

$$(14)\quad \Delta W+\kappa^2W=\frac{c^{-2}}{(\cosh u)^2-(\sin v)^2}\left(\frac{\partial^2W}{\partial u^2}+\frac{\partial^2W}{\partial v^2}+\tanh u\frac{\partial W}{\partial u}+\operatorname{ctn} v\frac{\partial W}{\partial v}\right)+\frac{1}{(c\cosh u\sin v)^2}\frac{\partial^2W}{\partial\phi^2}+\kappa^2W=0,$$

如其有正規解为

$$(15)\quad W=U(u)V(v)e^{\pm im\phi},$$

則函数 U 及 V 应滿足常微分方程

$$(16)\quad \frac{d^2U}{du^2}+\tanh u\frac{dU}{du}-[h-(\kappa c\cosh u)^2-(m\operatorname{sech} u)^2]U=0,$$

$$(17)\quad \frac{d^2V}{dv^2}+\operatorname{ctn} v\frac{dV}{dv}+[h-(\kappa c\sin v)^2-(m\csc v)^2]V=0,$$

其中 h 仍是一分离常数．方程(17)是球体波函数以 $-\kappa^2c^2$ 代替 κ^2c^2 时的微分方程，方程(16)可借代换 $u=i(v-\frac{1}{2}\pi)$ 化成(17)式．

像在 16-1-2 節中一样，m 应是一整数，V 应是一球体波函数，h 应取其特征値之一．方程(16)的解可称为扁球面的修正波函数．应当注意，扁球面所适用的修正，$u=iv-\frac{1}{2}\pi i$，与長球面所適用的修正，$u=iv$ 是不同的．由于 $V(\pi-v)$ 及 $V(v)\pm V(\pi-v)$ 也都是球体波函数，故可把 $V(v)$ 作为是 $v-\frac{1}{2}\pi$ 的偶函数或奇函数．对于一个在球体 $u=u_0$ 内部正則的波函数，通过 16-1-1 節中同样的分析可知，过坐标系的退化球体(此处点 $u=0$, $v=v_1$ 与点 $u=0$, $v=\pi-v_1$ 重合)的連續性要求 $U(u)$ 应是 u 的偶函数或奇函数，根据 $V(v)$ 是 $v-\frac{1}{2}$ 的偶函数或奇函数而定，也就是說，$U(u)=V(iv-\frac{1}{2}\pi i)$，我們把(16)式的这种解称为第一类修正球体波函数．在一扁球外部的波函数可用它在 $u=\infty$ 的性态來确定，所含的函数 U 称为第三类修正球体波函数．

16-1-4. 橢球坐标

我們以 15-1(8)式定义橢球坐标 α, β, γ，此处 $a>b>c>0$，k 由 15-1(6)式确定．关于坐标面的說明及 α, β, γ 的取値范圍見 15-1-1 節．从 15-1(9)式可知在橢球坐标 α, β, γ 中，偏微分方程 $\Delta W+\kappa^2W=0$ 变为

$$(18)\quad [(\mathrm{sn}\,\gamma)^2-(\mathrm{sn}\,\beta)^2]\frac{\partial^2W}{\partial\alpha^2}+[(\mathrm{sn}\,\alpha)^2-(\mathrm{sn}\,\gamma)^2]\frac{\partial^2W}{\partial\beta^2}$$
$$+[(\mathrm{sn}\,\beta)^2-(\mathrm{sn}\,\alpha)^2]\frac{\partial^2W}{\partial\gamma^2}+(a^2-b^2)k^2\kappa^2[(\mathrm{sn}\,\alpha)^2-(\mathrm{sn}\beta)^2]$$
$$\times[(\mathrm{sn}\,\beta)^2-(\mathrm{sn}\,\gamma)^2][(\mathrm{sn}\,\gamma)^2-(\mathrm{sn}\,\alpha)^2]W=0,$$

如果有正規解

$$(19)\quad W=A(\alpha)B(\beta)C(\gamma),$$

則函数 A, B, C 必滿足下列常微分方程:

(20) $$\frac{d^2A}{d\alpha^2}+[h-l(\mathrm{sn}\,\alpha)^2+(a^2-b^2)k^2\kappa^2(\mathrm{sn}\,\alpha)^4]A=0$$

(21) $$\frac{d^2B}{d\beta^2}+[h-l(\mathrm{sn}\,\beta)^2+(a^2-b^2)k^2\kappa^2(\mathrm{sn}\,\beta)^4]B=0$$

(22) $$\frac{d^2C}{d\gamma^2}+[h-l(\mathrm{sn}\,\gamma)^2+(a^2-b^2)k^2\kappa^2(\mathrm{sn}\,\gamma)^4]C=0,$$

其中 h 及 l 都是分离常数．这三个方程的形式都一样，它們所不同的只是各方程的自变数的取值范圍．共通的形式称为橢球波函数方程或 Lamé 波动方程．这些方程的解(满足適当边界条件)称为橢球波函数或 Lamé 波函数．如 $\kappa=0$，則三式都化成 Lamé 方程(第 15 章)，Lamé 波函数化成 Lamé 函数．

如果 W 在橢球 $u=u_0$ 內部或外部連續，并有連續導数，則所应加于 B 及 C 的边界条件卽为 15-1-1 節中所得的条件．这些边界条件确定了 h 及 l 的特征值，也确定了对应的第一类 Lamé 波函数．对于一在橢球 $u=u_0$ 內部正則的波函数，A 的边界条件仍和 15-1-1 節中的一样，因此 A 是第一类 Lamé 波函数．对于一在橢球外部正則的波函数，在無窮远处的漸近性态(卽趨近 $\alpha=i\boldsymbol{K}'$)是已知的，A 可表为第三类 Lamé 波函数．

馬蒂安函数

16-2. 一般馬蒂安方程及其解

我們將以方程

(1) $$\frac{d^2u}{dz^2}+[h-2\theta\cos(2z)]u=0$$

作为 Mathieu 方程的标准形式．这一形式是由 Ince(1932 及其他著作)及另外几位作者所用．目前尙無通用的标准形式．Whittaker 及 Watson (1927，第 19 章) 以 $h=a$，$\theta=-8q$，Stratton et al.

(1941) 以 $h=b-\frac{1}{2}c^2$, $4\theta=c^2$, Jahnke-Emde (1938) 以 $h=4a$, $\theta=8q$, 而在國家标准局所定的表上(1951) 則以 $h=b-\frac{1}{2}s$, $\theta=\frac{1}{4}s$.

Ince (1923) 还研究了如下的方程

$$\frac{d^2u}{dz^2}+[h-2\theta\cos(2z)-\nu(\nu-1)(\csc z)^2]u=0$$

他把它叫做連帶 Mathieu 方程. 因为代換 $u=(\sin z)^{\frac{1}{2}}v$ 可把方程変换为

$$\frac{d^2u}{dz^2}+\operatorname{ctn} z\frac{dv}{dz}+\left[h-\frac{1}{4}-2\theta\cos(2z)-\frac{(\nu-\frac{1}{2})^2}{(\sin z)^2}\right]v=0$$

这是球体波函数的微分方程,我們这里不討論連帶 Mathieu 方程.

在这一節中,我們將把 h 及 θ 都作为是已知的(实数或复数)常数. 因此,方程(1)可称之为一般 Mathieu 方程,以区别于只有 θ 一数是規定的而 h 取其特征値之一的 Mathieu 函数方程. 为了簡單起見,我們称(1)为 Mathieu 方程.

命

$$x=(\sin z)^2 \tag{2}$$

則得

$$4x(1-x)\frac{d^2u}{dx^2}+2(1-2x)\frac{du}{dx}+(h-2\theta+4\theta x)u=0 \tag{3}$$

这一方程称为代数 Mathieu 方程. 这一代数形式及有关方程应用在 Lindemann, Stieltjes 等的研究中. 代数 Mathieu 方程有二正則奇点,在 $x=0$ 及 $x=1$, 其指数都是 0 及 $\frac{1}{2}$, 并有一非正則奇点,在無窮远点上. 由于这一个非正則奇点的关系,(3)式就比較难以处理,不过,用它还可以導出解的某些級数展开式,展为 x 或 $1-x$ 的冪級数,或展为超比函数級数. 这一方程是 Heun 方程(見 15-3 節)的一个極限情形.

Mathieu 方程 (1) 是一具有周期系数的微分方程. 从这种方程的一般理論(Ince, 1927, p. 381 ff. Poole, 1936, p. 178 ff) 可知

(1)具有形如下式的一个解:

(4) $e^{\mu z}P(z)$

此处 $P(z)$ 是周期为 π 的周期函数，μ 为一常数，称为特征指数，依賴于 h 及 θ (Floquet 定理)．顯然，

(5) $e^{-\mu z}P(-z)$

也是(1)的一个解．一般，(4)及(5)是綫性独立的，并組成(1)的解的基本系．唯有的例外出現在 $i\mu$ 是一整数的时候；这是周期 Mathieu 函数的情形，將在16-4～16-8節討論．

形如(4)及(5)的解有时称为第一类解．Mathieu 方程的其他有效解是当 $z\to i\infty$ 或 $z\to -i\infty$ 时等于零的那些解；这种解称为第三类解．

确定 μ 的方法有很多，这里將介紹其中的几个，如欲知其詳細及数值确定方法，可参看 Blanch (1946) 及 McLachlan 著作的第四，五章．

Poincaré 确定 μ 的方法以(1)式的二个解 u_1 及 u_2 为根据，这二个解由下列初始条件定义，

(6) $u_1(0)=1,\ u_1'(0)=0;\ u_2(0)=0,\ u_2'(0)=1.$

这二解是綫性無关的，它們的 Wronski 行列式等于 1，u_1 是 z 的偶函数，u_2 是奇函数．如 $P(0)\neq 0$，則

$$u_1(z)=\frac{e^{\mu z}P(z)+e^{-\mu z}P(-z)}{2P(0)},$$

如 $P'(0)+\mu P(0)\neq 0$，則

$$u_2(z)=\frac{e^{\mu z}P(z)-e^{-\mu z}P(-z)}{2[P'(0)+\mu P(0)]}.$$

这二式中至少有一式是有意义的．微分 u_2，在 u_1 及 u_2' 中，都令 $z=\pi$；由于 $P(\pm\pi)=P(0)$，$P'(\pm\pi)=P'(0)$，故

(7) $\cosh(\mu\pi)=u_1(\pi)=\mu_2'(\pi)$

从(7)式可确定 μ 的符号及其 $2i$ 的整数倍数值．如果 $u_1(\pi)$ 或

$u_2'(\pi)$ 可相当精确地算出,则可用(7)式來完全确定 μ. (还可参看16–3 節).

Hill 將解(4)展开成如下的形式

(8) $$\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{(\mu+2ni)x}.$$

代入(1)式后可得系数 c_n 的遞推关系:

(9) $$-\theta c_{n+1}+[h+(\mu+2ni)^2]c_n-\theta c_{n-1}=0,\ n=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

將(9)寫成如下形式

(10) $$c_n+\gamma_n(\mu)(c_{n-1}+c_{n+1})=0, \qquad n=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

其中

(11) $$\gamma_n=\gamma_n(\mu)=\theta/[(2n-\mu i)^2-h]$$

系(10)的(無限)行列式为

(12) $$\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & 1 & \gamma_{-2}(\mu) & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & \gamma_{-1}(\mu) & 1 & \gamma_{-1}(\mu) & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & \gamma_0(\mu) & 1 & \gamma_0(\mu) & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & \gamma_1(\mu) & 1 & \gamma_1(\mu) & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & \gamma_2(\mu) & 1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}=\Delta(\mu)$$

μ 由方程 $\Delta(\mu)=0$ 确定. 無限行列式(12)顯然是絕將收斂的,它表示的是 μ 的一个半純函数. 这一函数具有單極,在 $\mu=\pm i(h^{1/2}+2n)$, $n=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 上. 由于 $\gamma_n(\mu+2ki)=\gamma_{n+k}(\mu)$, 其中 k 为一整数,且 $\gamma_n(-\mu)=\gamma_{-n}(\mu)$, 故知 $\Delta(\mu)$ 是周期为 $2i$ 的一个周期偶函数. 因此

(13) $$\Delta(\mu)-\frac{C}{\cosh(\mu\pi)-\cos(\pi h^{1/2})}$$

是 μ 的一个周期半純偶函数. 如果 C 确定得使(13)在 $\mu=ih^{1/2}$ 上不具有極,則(13)在任一处都沒有極. 因此必是一常数. 由于

$\mu\to\infty$ 时 $\Delta(\mu)\to 1$，故知这一常数的值是 1. 为了确定 C，命 $\mu=0$，得

$$(14)\quad \Delta(\mu)=1-\frac{[1-\Delta(0)][1-\cos(h^{1/2}\pi)]}{\cosh(\mu\pi)-\cos(h^{1/2}\pi)}$$

$$=\frac{\cosh(\mu\pi)-1+\Delta(0)[1-\cos(h^{1/2}\pi)]}{\cosh(\mu\pi)-\cos(h^{1/2}\pi)}.$$

由于 μ 由方程 $\Delta(\mu)=0$ 确定，故知

$$(15)\quad \cosh(\mu\pi)=1+2\Delta(0)[\sin(\tfrac{1}{2}h^{1/2}\pi)]^2.$$

关于 Mathieu 方程与类似的微分方程中的無限行列式的進一步研究参看 Magnus (1953).

如 h 及 θ 都是实数，从 (7) 或 (15) 可知 $\cosh(\mu\pi)$ 也是实数. 如 $-1<\cosh(\mu\pi)<1$，則 μ 是虚数，μi 不是整数，(4) 及 (5) 表明 Mathieu 方程的每一个解有界于实 z-軸. h,θ-平面上 $-1<\cosh(\mu\pi)<1$ 的那些区域称为**穩定区域**. 如果 $\cosh(\mu\pi)>1$，則 μ 可作为是非零的实数，如果 $\cosh(\mu\pi)<-1$，則 μi 可作为是非零的实数；在任一情形下，从 (4) 及 (5) 可以看出，Mathieu 方程的解，沒有一个在实軸上有界. h,θ-平面上，凡是 $\cosh(\mu\pi)>1$ 或 $\cosh(\mu\pi)<-1$ 的区域称为**不穩定区域**. 穩定区域和不穩定区域由 $\cosh(\mu\pi)=\pm 1$ 的曲綫分开，Mathieu 方程的一个解有界，(且是周期的)，而通解則無界；对于这一例外情形参看 16-4～16-8 節. 关于表明 h,θ-平面上穩定区域和不穩定区域的穩定性圖見 Strutt (1932, p. 24), McLachlan (1947, p. 40, 41) 及 NBS (國家标准局)表的 p. xliv, xlv. 关于穩定性圖的計算还可参看 Blanch (1946), Schäfke (1950).

在 λ 及 θ 的適度数值下，Mathieu 方程的解的数值計算方法大多以遞推关系 (9) 或其某一变式为基礎. 从 (9) 有

$$\frac{c_n}{c_{n-1}}=\frac{\theta}{h-(2n-i\mu)^2-\theta c_{n+1}/c_n}$$

$$=\frac{-\theta(2n-i\mu)^{-2}}{1-h(2n-i\mu)^{-2}+\theta(2n-i\mu)^{-2}c_{n+1}/c_n}$$

重复应用这一关系，像在15-3節中一样，可得一收斂的無限連分式，記为 R_n，則

(16)　$$\frac{c_n}{c_{n-1}}=R_n(\mu).$$

另一方面，从(9)还可有

$$\frac{c_n}{c_{n+1}}=\frac{-\theta(2n-i\mu)^{-2}}{1-h(2n-i\mu)^{-2}+\theta(2n-i\mu)^{-2}c_{n-1}/c_n},$$

重复应用这一关系，可得

(17)　$$\frac{c_n}{c_{n+1}}=L_n(\mu)=R_{-n}(-\mu)$$

其中 $L_n(\mu)$ 仍表示一無限連分式. 确定 μ 的方程为

(18)　$$L_0(\mu)R_1(\mu)=1,$$

在从(18)式計算 μ 的过程中，比(16)及(17)可自动求得，因此

(19)　$$c_n=c_0R_1(\mu)R_2(\mu)\cdots R_n(\mu)\qquad n=1,2,3,\cdots$$

(20)　$$c_{-n}=c_0L_{-1}(\mu)L_{-2}(\mu)\cdots L_{-n}(\mu)\qquad n=1,2,3,\cdots$$

从(16)及(17)式有

(21)　$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2c_n}{c_{n-1}}=\lim_{n\to-\infty}\frac{n^2c_n}{c_{n+1}}=-\frac{\theta}{4}$$

因此級数(8)在 $e^{\pm iz}$ 为有界的任一区域上絕对而一致收斂，复数 z-平面上任一水平的带域就是这种区域的一个例子.

在一穩定区域中，$\mu=i\rho$，ρ 是实数，只要 c_0 是实数，則所有的 c_n 也都是实数，从(8)可得两个綫性独立的实解

(22)　$$\sum_{-\infty}^{\infty}c_n\cos[(\rho+2n)z],\quad \sum_{-\infty}^{\infty}c_n\sin[(\rho+2n)z].$$

在一不穩定区域中，μ 或 $\mu-i$ 是实数，在任一情形下，(8)是一实解，两个綫性独立的实解为

(23)　$$\sum_{-\infty}^{\infty}c_ne^{(\mu+2ni)z},\quad \sum_{-\infty}^{\infty}c_ne^{-(\mu+2ni)z}.$$

当 z 是实数时，(8)是最优的展开式，对于 z 的复数值，另外一

些展开式可導致收斂得更快的級数，它們也適于作第三类解的表示式之用。

Erdélyi (1942)令

(24) $$\phi_\nu(z)=\left[e^{i\pi}\frac{\cos(z-\beta)}{\cos(z+\beta)}\right]^{\nu/2}J_\nu\{2[\theta\cos(z-\beta)\cos(z+\beta)]^{1/2}\}$$

其中 β 为一任意的定数，为实数或为复数。应用 Bessel 函数的遞推关系及微分公式，經直接計算后可得

(25) $$\frac{d^2\phi_\nu}{dz^2}-2\theta\phi_\nu\cos(2z)=-\theta\phi_{\nu-2}-\nu^2\phi_\nu-\theta\phi_{\nu+2}$$

由此可知，只要 c_n 滿足(9)式，卽和(8)中的 c_n 一样，则

(26) $$\sum_{-\infty}^{\infty}c_n\phi_{2n-i\mu}(z)$$

是 Mathieu 方程的一个形式解。从 Bessel 函数的漸近公式得

(27) $$\lim_{n\to\infty}\frac{\phi_{2n-i\mu-2}}{n^2\phi_{2n-i\mu}}=\lim_{n\to-\infty}\frac{\phi_{2n-i\mu}}{n^2\phi_{2n-i\mu+2}}=\frac{-4}{\theta[\cos(z-\beta)]^2}.$$

(21)及(27)式表明(26)在 $|\cos(z-\beta)|>1$ 时是收斂的，并代表一个解。收斂区域由二不相連的部分組成，其中有一部分完全在半平面 $\operatorname{Im}(z-\beta)>0$ 上，另一部分在半平面 $\operatorname{Im}(z-\beta)<0$ 上。从(24)式可知 $\phi_\nu=[\cos(z-\beta)]^\nu$ 乘上一 z 的整函数。当 z 在半平面 $\operatorname{Im}(z-\beta)>0$ 上变化至 $z+2\pi$ 时，$\cos(z-\beta)$ 以負方向圍繞原点，由此可知，在半平面 $\operatorname{Im}(z-\beta)>0$ 上的收斂区域中，(26)式所表示的是第一类解(5)。同理，在半平面 $\operatorname{Im}(z-\beta)<0$ 上的收斂区域中，(26)式所表示的是第一类解(4)。

如 $\beta=0$ 及 $\beta=\pi/2$，則得(26)式的特殊形式，这些特殊情形分别为：

(28) $$e^{\frac{1}{2}\pi\mu}\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^n c_n J_{2n-i\mu}(2\theta^{1/2}\cos z)$$

(29) $$\sum_{-\infty}^{\infty}c_n J_{2n-i\mu}(2\theta^{1/2}i\sin z).$$

当 $\beta\to i\infty$ 时，(8)成为(26)的極限形式。

现在在(24)式中，以 $H_\nu^{(j)}$, $j=1, 2$, 代替 J_ν, 并將所得函数記为 $\psi_\nu^{(j)}$. 由于第一类及第三类 Bessel 函数滿足同样的遞推关系，并遵守同样的微分公式，因此

$$(30)\qquad \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \psi_{2n-i\mu}^{(j)}$$

是 Mathieu 方程的一个形式解，c_n 与(8)式中的相同. 用比值檢驗法檢驗(30)的收斂性，可知它在 $|\cos(z-\beta)|>1$ 及 $|\cos(z+\beta)|>1$ 时收斂. 在半平面 $\operatorname{Im} z>|\operatorname{Im}\beta|$ 上恆有一收斂区域，在 $\operatorname{Im} z<-|\operatorname{Im}\beta|$ 上有另一收斂域。在这二收斂域中，(30)所表示的是第三类解，这可从 $z\to i\infty$ 时(30)式的漸近性态中看出（見 Meixner, 1949 a). 如果 $|\operatorname{Im}\beta|$ 充分大，或更嚴格地説，如果 $\sinh|\operatorname{Im}\beta|>1$, 則有一第三个收斂域，它包含整个实 z-軸，并位于帶域 $|\operatorname{Im} z|<|\operatorname{Im}\beta|$ 中. 在这一收斂域中，(30)式所表示的是第一类解(4)或(5)，根据 $\operatorname{Im}\beta$ 是正或負而定。

Sieger (1908) 及 Dougall (1916) 將 Mathieu 方程的解展开为 Bessel 函数積的級数. 在这种情形下，命

$$(31)\qquad \phi_{\nu,\lambda}(z)=e^{i\nu\pi}J_{\nu+\lambda}(\theta^{1/2}e^{iz})J_\nu(\theta^{1/2}e^{-iz})$$

經过直接运算，可得

$$(32)\qquad \frac{d^2\phi_{\nu,\lambda}}{dz^2}-2\theta\phi_{\nu,\lambda}\cos(2z)=-\theta\phi_{\nu-1,\lambda}-(2\nu+\lambda)^2\phi_{\nu,\lambda}-\theta\phi_{\nu+1,\lambda}.$$

这一关系表明，

$$(33)\qquad \sum_{-\infty}^{\infty} c_n\phi_{n,-i\mu}$$

是 Mathieu 方程的一个形式解，其系数由(9)确定. 由于

$$(34)\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{n^2\phi_{n+1,-i\mu}}{\phi_{n,-i\mu}}=-\frac{\theta}{4},\quad \lim_{n\to-\infty}\frac{\phi_{n,-i\mu}}{\phi_{n+1,-i\mu}}=-e^{-2iz},$$

故知(21)及(33)在整个 z-平面上收斂. 因为(33)式是 $e^{\mu z}$ 与 z 的

整函数的相乘積，故知它表示的是第一类解(4).

Bessel 函数積的級数很多，例如

$$(35)\qquad \sum_{-\infty}^{\infty} c_n H^{(j)}_{n-i\mu}(\theta^{1/2}e^{iz})J_{-n}(\theta^{1/2}e^{-iz}), \qquad j=1,2.$$

其他級数都是(33)及(35)的修正式及組合式. 还可参看 16–5 及 16–6 節.

16–3. 一般馬蒂安方程解的近似式，積分关系式及積分方程

$|\theta|$很小时的近似式. 当 $\theta=0$ 时，Mathieu 方程 16–2(1)的二个第一类解(退化的)为 $\exp(\pm ih^{1/2}z)$，因此，此时的 $\mu=ih^{1/2}$. 对于 $|\theta|$ 的很小值，16–2 (15)中的行列式可計值为

$$(1)\qquad \Delta(0)=1+\frac{\pi\theta^2}{(1-h)h^{1/2}}\operatorname{ctn}\left(\frac{\pi h^{1/2}}{2}\right)+O(\theta^4)$$

因此方程 16–2(15) 变为

$$(2)\qquad \cosh(\mu\pi)=\cos(h^{1/2}\pi)+\frac{\pi\theta^2}{(1-h)h^{1/2}}\sin(h^{1/2}\pi)+O(\theta^4)$$

这可用以計算 μ. 另外，由 16–2(1) 及 16–2(6) 所确定的 u_1 可展为 θ 的冪級数如下:

$$u_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\theta^n f_n(z)$$

其中

$$f_0(z)=\cos(h^{1/2}z)$$

$$f_n(z)=2h^{-1/2}\int_0^z\cos(2t)\sin[h^{1/2}(z-t)]f_{n-1}(t)dt, \qquad n=1,2,\cdots$$

因此 16–2(7) 可用以計算特征指数 μ. μ 一經确定以后，展开式 16–2(8)中的系数可从連分式中算出，或者 16–2(4) 的 $P(z)$ 可展为 θ 的冪級数，这一展开式中的項可从 16–2(1) 式來逓次确定.

对于小的 $|\theta|$，另一逼近方法可参看 Whittaker 及 Watson

(1927, § 19–7) 或 Strutt (1932, p. 26).

$|h|$, $|\theta|$ 很大时的漸近式 我們假設 h 及 θ 都是实数.

如 $h>2|\theta|$, 应用 Liouville 变换

$$(3) \qquad \zeta=\int_0^z [h-2\theta\cos(2t)]^{1/2}dt,\ \eta=[h-2\theta\cos(2z)]^{1/4}u$$

將 Mathieu 方程 16–2 (1) 变換为

$$(4) \qquad \frac{d^2\eta}{d\zeta^2}+[1+r(\zeta)]\eta=0$$

其中

$$(5) \qquad r(\zeta)=\frac{4\theta^2-2h\theta\sin(2z)+\theta^2[\sin(2z)]^2}{[h-2\theta\cos(2z)]^3}.$$

如果 h 很大, 則 $r(\zeta)$ 在与 1 相比时很小, 因此对应于 u_1 的 (4) 的解近似地等于 $\cos\zeta$ 的一个常数倍数, 16–2 (7) 变为

$$(6) \qquad \cosh(\mu\pi)=\cos\left\{\int_0^\pi [h-2\theta\cos(2t)]^{1/2}dt\right\}+O(h^{-1/2})$$

$$h\to\infty,\ 2|\theta|\leqslant h-\varepsilon,\ \varepsilon>0.$$

如 $h<-2|\theta|$, 則应用稍微不同的变換

$$\zeta=\int_0^z [-h+2\theta\cos(2t)]^{1/2}dt,\ \eta=[-h+2\theta\cos(2z)]^{1/4}u$$

仍可得 (6). 实际上, 只要 $2|\theta|\leqslant|h|-\varepsilon$, $\varepsilon>0$, (6) 对 h 的任意复数值都成立.

如 h 及 θ 都是实数而 $-2\theta<h<2\theta$, 則 (5) 式的 $r(\zeta)$ 不再有界, 对于这些接近于 $\frac{1}{2}\cos^{-1}[h/(2\theta)]$ 的 z 值來說, 当然不能再予略去. 又, (6) 中的積分既不是实数, 也不是虛数. 在这种情形下, Strutt (1932, p. 28) 証明

$$(7) \qquad \cosh(\mu\pi)=\cos\left\{\mathrm{Re}\int_0^\pi [h-2\theta\cos(2t)]^{1/2}dt\right\}$$

$$\times\cosh\left\{\mathrm{Im}\int_0^\pi [h-2\theta\cos(2t)]^{1/2}dt\right\}+O(h^{-1/2}),\ h\to\infty.$$

关于 h, θ 为較大实数, z 为复数情形下 Mathieu 方程 16–2 (1) 的

解的詳細研究參看 Langer (1934).

$|\sin z|$很大时的漸近式. 点 $x=\infty$ 是 Mathieu 方程代数形式 16-2(3) 的一个不正則奇点. 滿足 16-2(3) 式的有如下的形式級数

$$\exp(\pm 2\theta^{1/2}x^{1/2})\,\Sigma\, a_n x^{-1/4-1/2n};$$

这种級数称为次正規解 (Ince, 1927, § 17-53). 虽然这种級数都是發散的,但从綫性微分方程的一般理論可知它們所表示的是当 $x\to\infty$ 时方程 16-2(3)的某些解的漸近式.

作 16-2(2)的反变换,可知形式級数

$$(8)\qquad \exp(\pm 2\theta^{1/2}\sin z)\,\Sigma\, a_n(\sin z)^{-1/2-n}$$

滿足 Mathieu 方程 16-2(1),并知当 $\operatorname{Im} z\to\pm\infty$ 时, Mathieu 方程的某些解(第三类解)可以級数(8)之一來漸近地表示. Mathieu 方程的任一个解可用(8)式中的二級数的綫性組合來表示,不过这个綫性組合中的常数將随 z-平面上縱向帶域的不同而不同. 还可參看 Dougall (1916) 及 Whittaker-Watson (1927, § 19-8).

关于第一类解的漸近展开式(按 e^{iz} 的降冪展开,而不按 $\sin z$), 見 Erdélyi (1936, 1938). 当 $\operatorname{Im} z\to\pm\infty$ 时, Mathieu 方程的解的漸近性态也可用不同解的 Bessel 函数級数來确定. 所需的一般定理由 Meixner (1949 a) 証明.

積分关系及積分方程. 設 $N(z,\zeta)$为一核,滿足偏微分方程

$$(9)\qquad \frac{\partial^2 N}{\partial z^2}-2\theta\cos(2z)\,N=\frac{\partial^2 N}{\partial\zeta^2}-2\theta\cos(2\zeta)\,N,$$

并設

$$(10)\qquad g(z)=\int_a^b N(z,\zeta)\,f(\zeta)\,d\zeta.$$

則,重复作分部積分,可得

$$(11)\qquad \frac{d^2g}{dz^2}+[h-2\theta\cos(2z)]g=\int_a^b\left\{\frac{\partial^2 N}{\partial\zeta^2}+[h-2\theta\cos(2\zeta)]N\right\}f\,d\zeta$$

$$=\left[\frac{\partial N}{\partial\zeta}f-N\frac{\partial f}{\partial\zeta}\right]_a^b+\int_a^b N\left\{\frac{d^2f}{d\zeta^2}+[h-2\theta\cos(2\zeta)]f\right\}d\zeta$$

如果核 N 及積分上下限 a 及 b 的选擇可使

$$(12)\quad \left[\frac{\partial N}{\partial \zeta} f - N\frac{\partial f}{\partial \zeta}\right]_{\zeta=a}^{\zeta=b} = 0,$$

則(11)式表明只要 $f(z)$ 是 Mathieu 方程的一个解，$g(z)$ 也是該方程的一个解.

$\cosh(\mu\pi) = \pm 1$ 的情形就是周期 Mathieu 函数的情形，將在后面討論(見 16-4, 16-8 節). 在这一節中，我們設 $\cosh(\mu\pi) \neq \pm 1$，因此二个第一类解

$$(13)\quad u_0(z) = e^{\mu z}P(z),\quad u_0(-z) = e^{-\mu z}P(-z)$$

是綫性無关的. 从(8)式可知当 $z \to \pm i\infty$ 时，

$$(14)\quad u_0(z) = c_1(\sin z)^{\frac{1}{2}}\exp(2\theta^{\frac{1}{2}}\sin z)[1+O(|\sin z|^{-1})]$$
$$+c_2(\sin z)^{-\frac{1}{2}}\exp(-2\theta^{\frac{1}{2}}\sin z)[1+O(|\sin z|^{-1})]$$

其中的常数 c_1 及 c_2 在从一个縦帶域移向另一縦帶域时可以改变.

在(10)式中，我們將令 $f(\zeta) = u_0(\zeta)$，且

$$(15)\quad N(z,\zeta) = \exp[2\theta^{\frac{1}{2}}(\sin z\sin\zeta\sin\beta + i\cos z\cos\zeta\cos\beta)],$$

其中 β 是一不变的实数或复数；(15)满足(9). 当 $\mathrm{Im}\,\zeta \to \pm\infty$ 时，(12)式方括弧內的表达式的漸近性态現在可用(14)及(15)式來探討. 命

$$(16)\quad \arg\{\theta^{\frac{1}{2}}[\cos(z-\beta)+1]\} = \alpha_1,$$
$$\arg\{\theta^{\frac{1}{2}}[\cos(z-\beta)-1]\} = \alpha_2,$$
$$\arg\{\theta^{\frac{1}{2}}[\cos(z+\beta)+1]\} = \alpha_3,$$
$$\arg\{\theta^{\frac{1}{2}}[\cos(z+\beta)-1]\} = \alpha_4.$$

于是，当 $\mathrm{Im}\,\zeta \to \infty$ 时，只要 $\rho = \mathrm{Re}\,\zeta$ 满足条件

$$(17)\quad \sin(\rho-\alpha_1) < 0,\quad \sin(\rho-\alpha_2) < 0,$$

則

$$\frac{\partial N}{\partial \zeta}u_0 - N\frac{\partial u_0}{\partial \zeta} \to 0,$$

而当 $\mathrm{Im}\,\zeta \to -\infty$ 时，只要 $\rho' = \mathrm{Re}\,\zeta$ 满足条件

$$(18)\quad \sin(\rho'+\alpha_3) > 0,\quad \sin(\rho'+\alpha_4) > 0.$$

則

$$\frac{\partial N}{\partial \zeta} u_0 - N \frac{\partial u_0}{\partial \zeta} \to 0.$$

(17) 中的二不等式在 $\operatorname{Im}(z-\beta)\neq 0$ 时相容，(18) 中的二不等式在 $\operatorname{Im}(z+\beta)\neq 0$ 时相容. 如 ρ 是(17)的任一解，則 $\rho+2n\pi$ 也是一个解，此处 n 为一整数，同理对于 ρ' 也如此. 这説明(10)式中可用的積分路徑与 Bessel 函数的 Sommerfeld 積分表示式(見 7-3-5 節)中所用的十分相似.

設 ρ 滿足(17)，并考察

$$g(z)=\int_{\rho+i\infty}^{\rho+2\pi+i\infty} N(z,\zeta)\,u_0(\zeta)\,d\zeta,$$

積分路徑与 7-3-5 節中的 C_3 一样. 則条件(12)成立，$g(z)$ 將是 Mathieu 方程的一个解，因此具有如下形式

(19) $\quad g(z)=C_1u_0(z)+C_2u_0(-z)$

当 z 在半平面 $\operatorname{Im}(z-\beta)<0$ 上变化至 $z+2\pi$ 时，α_1 及 α_2，因此也是 ρ，都增加 2π.

(20) $\quad g(z+2\pi)=C_1e^{2\mu\pi}u_0(z)+C_2e^{-2\mu\pi}u_0(-z)=\int_{\rho+2\pi+i\infty}^{\rho+4\pi+i\infty}$

在最后一積分中，以 $\zeta+2\pi$ 代 ζ，得

(21) $\quad g(z+2\pi)=\int_{\rho+i\infty}^{\rho+2\pi+i\infty} N(z,\zeta)\,u_0(\zeta+2\pi)\,d\zeta=e^{2\mu\pi}g(z).$

比較(20)及(21)式可知 $C_2=0$. 因此奇異積分方程:

(22) $\quad \int_{\rho+i\infty}^{\rho+2\pi+i\infty} N(z,\zeta)\,u_0(\zeta)\,d\zeta=\lambda u_0(z) \qquad \operatorname{Im}(z-\beta)<0$

必为第一类解所滿足. 在(22)式中，如令 $\beta=0$，則方程变为

(23) $\quad u_0(z)=\text{const.}\int_{\rho+i\infty}^{\rho+2\pi+i\infty}\exp\left(2i\theta^{1/2}\cos z\cos\zeta\right)u_0(\zeta)\,d\zeta$

$\operatorname{Im} z<0,$

从此就可以看出它与第一类 Bessel 函数的 Sommerfeld 積分表示式 7-3(23) 之間的密切关系. 这些積分方程也可以用來說明

16-2 節中第一类解的各展开式之間的关系．如 16-2(8)以(23)式積分号下的 u_0 代替，再应用 7-3(23) 式，郎得 16-2(28)式，同样，从(22)式可得 16-2(26) 式．因此 16-2 節的所有展开式都具有相同系数这一事实就是 $u_0(z)$所满足的積分方程的一个直接推論．

除了 7-3-5 節的 C_3 型路徑之外，可以用 C_1 型或 C_2 型路徑．設 ρ,ρ' 满足(17)及(18)，考察

$$(24)\quad g(z)=\int_{\rho'-i\infty}^{\rho+i\infty} N(z,\zeta)u_0(\zeta)d\zeta \qquad \operatorname{Im}(z\pm\beta)\neq 0$$

首先設 z 限制于帶域 $|\operatorname{Im} z|<|\operatorname{Im}\beta|$ 之上．在这一帶域中，当 z 增加 2π 时，如 $\operatorname{Im}\beta$ 为正，則 ρ 及 ρ' 都增加 2π；如 $\operatorname{Im}\beta$ 为負，則 ρ 及 ρ' 都減少 2π．因此，$u_0(z)$所满足的另一奇異積分方程为

$$(25)\quad \int_{\rho'-i\infty}^{\rho+i\infty} N(z,\zeta)u_0(\zeta)d\zeta=\lambda u_0(\pm z), \qquad |\operatorname{Im} z|<|\operatorname{Im}\beta|$$

这样就可求得第一类解在帶域 $|\operatorname{Im} z|<|\operatorname{Im}\beta|$ 上的 16-2(30) 型展开式(还可参看 16-2 節)．反之，如 $\operatorname{Im} z>|\operatorname{Im}\beta|$ 或 $\operatorname{Im} z<-|\operatorname{Im}\beta|$，則当 z 增加 2π 时，ρ 增加 2π 而 ρ' 減少 2π，或 ρ 減少 2π 而 ρ' 增加 2π．在这种情况下，(24)中的積分路徑改变其形狀和位置，積分不再代表第一类解．从 $\operatorname{Im} z\to\infty$ 时 N 的性态可知

$$(26)\quad u_3(z)=\int_{\rho'-i\infty}^{\rho+i\infty} N(z,\zeta)u_0(\zeta)d\zeta, \qquad \operatorname{Im} z>|\operatorname{Im}\beta|$$

在 $\operatorname{Im} z\to\infty$ 时按指数趋向于零，因此是一第三类解．应用第一类解与第三类解之間的这种積分关系可以導出形如 16-2(30) 式的第三类解的展开式．

还有第三类解的奇異積分方程，以及將第一类解表达为包含 u_3 的積分式的積分关系．

16-4. 周期馬蒂安函数

如果 $i\mu$ 是一整数，則第一类解 16-2(4)是一**周期函数**：如 $i\mu$ 是一偶整数，則这一函数的周期是 π，如果 $i\mu$ 是一奇整数，則 π 是

它的半周期(即这一解在 z 增加 π 时改变符号),因此在后一情形下,函数的周期是 2π. 除非另有規定,否則,我們所說函数是周期的,是指周期 π 或半周期 π. 在 Mathieu 方程的很多应用中,需要用到周期解,16-4～16-8 節專門討論周期 Mathieu 函数以及第二第三类对应解.

在实 h, θ-平面上,凡是 $i\mu$ 是一整数的那些曲綫称为特征曲綫;它們把 h, θ-平面分成穩定和不穩定区域(見 16-2 節). 在給定了 θ 以后,凡使周期解存在的那些 h 値称为特征值,周期解称为 Mathieu 函数或第一类 Mathieu 函数. 这一类函数現在尙沒有一般公認的定义或記法. 这里我們將采用 Ince 的記法(1932), McLachlan (1947)等也用这种記法. 不过,应当指出:(i)許多早期的作者所用的一种規格化与 Goldstein 所提出, Ince 及 McLachlan 与本書所采用者不同;(ii) Stratton et al. (1941)及 NBS 表(1951)用的是一种不同的記法和規格化. 在 NBS 表的 p. xxxviii 上有这三种記法的詳細比較.

在我們整个的討論中,都以 θ 为实数,因此 h 的特征値及特征函数都是实的. 复参数的情形曾由 Strutt (1935, 1948)研究过.

如果 $u(z)$是一 Mathieu 函数,則函数

$$u(-z), \quad u(z)\pm u(-z)$$

也是 Mathieu 函数,因此我們对 Mathieu 函数的討論可以 z 的偶函数或奇函数为限. 凡是在区間 $0\leqslant z<\pi$, 或实軸上長度为 π 的任一半开区間上具有 n 个零点的偶 Mathieu 函数以 $\mathrm{ce}_n(z, \theta)$ 表示,奇 Mathieu 函数以 $\mathrm{se}_n(z, \theta)$表示. 对应的 h 的特征値分別以 $a_n(\theta)$ 及 $b_n(\theta)$ 表示. 我們常常把这些記法寫成 $\mathrm{ce}_n(z)$, $\mathrm{se}_n(z)$, a_n, b_n 而省去 θ.

Mathieu 函数是 Sturm-Liouville 問題的特征函数,这些問題包括微分方程

(1) $$\frac{d^2u}{dz^2}+[h-2\theta\cos(2z)]u=0$$

及边界条件:

(2) $u(0)=u(\pi)=0$, 对 $\mathrm{se}_n(z,\theta)$ 而言

(3) $\frac{du}{dz}(0)=\frac{du}{dz}(\pi)=0$, 对 $\mathrm{ce}_n(z,\theta)$ 而言.

从一般的 Sturm-Liouville 理論(見 Ince, 1927, 第10章)可知,对于每一个 $n=1, 2, \cdots$, 有一个特征函数 $\mathrm{se}_n(z,\theta)$, 除其常数因子外可被确定,而对于每一个 $n=0, 1, 2, \cdots$, 則有一个特征函数 $\mathrm{ce}_n(z,\theta)$, 除常数因子外,也可被确定. 現在我們用选擇任意常数因子來完成 Mathieu 函数的定义,使

(4) $$\mathrm{ce}_n(0,\theta)>0, \quad \int_0^{2\pi}[\mathrm{ce}_n(z,\theta)]^2dz=\pi$$

$$\frac{d\,\mathrm{se}_n}{dz}(0,\theta)>0, \quad \int_0^{2\pi}[\mathrm{se}_n(z,\theta)]^2dz=\pi.$$

如果以 $e(z)$ 代表 $\mathrm{ce}_n(z)$ 或 $\mathrm{se}_n(z)$, 則 $e(z)$ 及 $e(\pi-z)$ 滿足同一微分方程及同样的边界条件,因此必互为常数倍数,故知 $e(z)$ 必为 $\frac{1}{2}\pi-z$ 的偶函数或奇函数,有下列四种情形:

(5) $u(0)=u\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, $e=\mathrm{se}_{2m+2}(z)$, 周期 π

(6) $u(0)=\frac{du}{dz}\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, $e=\mathrm{se}_{2m+1}(z)$, 周期 2π

(7) $\frac{du}{dz}(0)=u\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, $e=\mathrm{ce}_{2m+1}(z)$, 周期 2π

(8) $\frac{du}{dz}(0)=\frac{du}{dz}\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, $e=\mathrm{ce}_{2m}(z)$, 周期 π.

对于每一个 $m=0, 1, 2, \cdots$, 这四个边值問題的每一个恰有一特征函数,而 m 就是区間 $0<z<\frac{1}{2}\pi$ 上的零点数.

从(5)-(8)还可有:对于 $\mathrm{ce}_{2m+1}(z)$ 及 $\mathrm{se}_{2m+2}(z)$,

(9) $$u\left(-\frac{\pi}{2}\right)=u\left(\frac{\pi}{2}\right)=0,$$

而对于 $ce_{2m}(z)$ 及 $se_{2m+1}(z)$，有

(10) $$\frac{du}{dz}\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{du}{dz}\left(\frac{\pi}{2}\right)=0.$$

最后，对于所有的 Mathieu 函数，有

(11) $$u(-\pi)=u(\pi),\ \frac{du}{dz}(-\pi)=\frac{du}{dz}(\pi).$$

如果应用 Sturm-Liouville 問題的特征值的比較定理，则从(3)可得 $a_n<a_{n+1}$，从(2)可得 $b_n<b_{n+1}$，从(9)可得 $a_{2m+1}<b_{2m+2}<a_{2m+3}$，从(10)可得 $a_{2m}<b_{2m+1}<a_{2m+2}$. 这样，就可知各特征值的相对位置，但 a_n 及 b_n 的相对位置还無法从上面來推知. Ince 曾証明，如 $\theta\gtrless 0$，則 $a_n\neq b_n$，又从数值表上可知 $\theta<0$ 时 $a_n>b_n$. 因此有

(12) $$a_0<a_1<b_1<b_2<a_2<a_3<b_3<\cdots \qquad \theta>0$$

$$a_0<b_1<a_1<b_2<a_2<b_3<a_3<\cdots \qquad \theta<0$$

当 $n\to\infty$ 时，$a_n, b_n\to\infty$.

关于特征值的進一步研究，其估值，及其漸近形式見 Strutt (1943).

表 1 中所列的对称关系是根据上述边界条件列出的：

表 1 馬蒂安函数的对称关系

$e(z)$	$e(-z)$	$e(\pi-z)$	$e(\pi+z)$
ce_{2m}	ce_{2m}	ce_{2m}	ce_{2m}
ce_{2m+1}	ce_{2m+1}	$-ce_{2m+1}$	$-ce_{2m+1}$
se_{2m+1}	se_{2m+1}	se_{2m+1}	$-se_{2m+1}$
se_{2m+2}	$-se_{2m+2}$	$-se_{2m+2}$	se_{2m+2}

Mathieu 方程(1)在变换 $\theta=-\theta'$, $z=\frac{1}{2}\pi-z'$ 下保持不变. 因此，从(5)至(8)及(4)可知

(13) $$a_{2m}(-\theta)=a_{2m}(\theta),\ b_{2m+2}(-\theta)=b_{2m+2}(\theta),$$

$$a_{2m+1}(-\theta)=b_{2m+1}(\theta),$$

$$(14)\quad \mathrm{ce}_{2m}(z,\,-\theta)=(-1)^m\mathrm{ce}_{2m}(\tfrac{1}{2}\pi-z,\,\theta)$$
$$\mathrm{se}_{2m+2}(z,\,-\theta)=(-1)^m\mathrm{se}_{2m+2}(\tfrac{1}{2}\pi-z,\,\theta)$$
$$\mathrm{ce}_{2m+1}(z,\,-\theta)=(-1)^m\mathrm{se}_{2m+1}(\tfrac{1}{2}\pi-z,\,\theta).$$

因为 Mathieu 函数是某些 Sturm-Liouville 問題的特征函数,它們应具有如下的正交性質:

$$(15)\quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\mathrm{ce}_{2k}(z)\mathrm{ce}_{2m}(z)dz=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\mathrm{ce}_{2k+1}(z)\mathrm{ce}_{2m+1}(z)dz$$
$$=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\mathrm{se}_{2k+1}(z)\mathrm{se}_{2m+1}(z)\,dz$$
$$=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\mathrm{se}_{2k+2}(z)\mathrm{se}_{2m+2}(z)dz=0$$
$$k,\,m=0,\,1,\,2,\,\cdots,\,k\neq m,$$

$$(16)\quad \int_0^{\pi}\mathrm{ce}_n(z)\mathrm{ce}_l(z)dz=\int_0^{\pi}\mathrm{se}_{n+1}(z)\mathrm{se}_{l+1}(z)dz=0$$
$$l,\,n=0,\,1,\,2,\,\cdots,\,l\neq n,$$

$$(17)\quad \int_0^{2\pi}\mathrm{ce}_n(z)\mathrm{se}_{l+1}(z)dz=0,\qquad l,\,n=0,\,1,\,2,\,\cdots$$

如果 $i\mu$ 是一有理函数,則 16–2(4) 及 16–2(5) 都是 Mathieu 方程的周期解,周期为 π 的一个倍数. 这种解有时称为非整数階 Mathieu 函数(見 McLachlan, 1947, 第 4 章). 这种函数的正交性質曾由 Schäfke (1953)求得.

Mathieu 函数的積分方程可从上節的方法中求得. 如 f 是任一周期 Mathieu 函数, $b=a+2\pi$, N 是 16–3(9) 的一个解,是 ζ 的周期函数,則方程 16–3(12) 被满足,而 16–3(10)是 Mathieu 方程的一个解. 如 N 也是 z 的周期函数,則 16–3(10)是(1)的一个周期解,因此是一 Mathieu 函数的倍数. 我們可拿來作为核的有:具有任意 β 的 16–3(15), 或 β 的特殊值的 16–3(15), 16–3(15) 的核的組合,这些核关于 β 的偏導数等等. 区間可用 Mathieu 函数的对称性質來化簡. 在表 2 中,列出了 Mathieu 函数的毛積分方程的区間及核,方程的形式为

(18)　$\int_a^b N(z,\zeta)e(\zeta)d\zeta=\lambda e(z).$

如給 β 以特殊值(如 $\beta=0$ 或 $\beta=\pi/2$, 則必須先除以 $\sin\beta$ 或 $\cos\beta$), 或对 β 積分則可求得另外的核. 包含 Bessel 函数的核 (Erdélyi 1942 a, McLachlan 1947, 第10章)即可用这一方法求得.

表 2　馬蒂安函数的積分方程

a	b	$N(z,\zeta)$	$e(z)$
0	π	$\exp(2i\theta^{1/2}\cos z\cos\zeta\cos\beta)\cosh(2\theta^{1/2}\sin z\sin\zeta\sin\beta)$	$ce_n(z)$
0	π	$\exp(2i\theta^{1/2}\cos z\cos\zeta\cos\beta)\sinh(2\theta^{1/2}\sin z\sin\zeta\sin\beta)$	$se_{n+1}(z)$
0	$\frac{1}{2}\pi$	$\cos(2\theta^{1/2}\cos z\cos\zeta\cos\beta)\cosh(2\theta^{1/2}\sin z\sin\zeta\sin\beta)$	$ce_{2m}(z)$
0	$\frac{1}{2}\pi$	$\sin(2\theta^{1/2}\cos z\cos\zeta\cos\beta)\cosh(2\theta^{1/2}\sin z\sin\zeta\sin\beta)$	$ce_{2m+1}(z)$
0	$\frac{1}{2}\pi$	$\cos(2\theta^{1/2}\cos z\cos\zeta\cos\beta)\sinh(2\theta^{1/2}\sin z\sin\zeta\sin\beta)$	$se_{2m+1}(z)$
0	$\frac{1}{2}\pi$	$\sin(2\theta^{1/2}\cos z\cos\zeta\cos\beta)\sinh(2\theta^{1/2}\sin z\sin\zeta\sin\beta)$	$se_{2m+2}(z)$

16–5. 馬蒂安函数的展开式及第二类函数

从 Mathieu 函数的周期性, 以及表 1 中所列的对称性, 可知这些函数都可以展为 Fourier 級数. 如下:

(1)　$ce_{2m}(z,\theta)=\sum_{r=0}^{\infty}A_{2r}\cos(2rz)$

(2)　$ce_{2m+1}(z,\theta)=\sum_{r=0}^{\infty}A_{2r+1}\cos[(2r+1)z]$

(3)　$se_{2m+1}(z,\theta)=\sum_{r=0}^{\infty}B_{2r+1}\sin[(2r+1)z]$

(4)　$se_{2m+2}(z,\theta)=\sum_{r=0}^{\infty}B_{2r+2}\sin[(2r+2)z]$

这些都是 $i\mu$ 为整数时 16–2(8) 式簡化成的形式, 如果必要, Mathieu 函数的階以及 θ 的值可表記如下: $A_{2r}^{2m}(\theta)$ 以示 A_{2r}, 等等,

將展开式 (1) 至 (4) 代入 Mathieu 方程 16–4(1), 可得确定 $A_{2r},\cdots,B_{2r+2}$ 的遞推关系如下:

(5) $$hA_0-\theta A_2=0$$

$$(h-4)A_2-\theta(2A_0+A_4)=0$$

$$(h-4r^2)A_{2r}-\theta(A_{2r-2}+A_{2r+2})=0$$

$$h=a_{2m}(\theta),\ r=2,\ 3,\ \cdots$$

(6) $$(h-\theta-1)A_1-\theta A_3=0$$

$$[h-(2r+1)^2]A_{2r+1}-\theta(A_{2r-1}+A_{2r+3})=0$$

$$h=a_{2m+1}(\theta),\ r=1,\ 2,\ \cdots$$

(7) $$(h+\theta-1)B_1-\theta B_3=0$$

$$[h-(2r+1)^2]B_{2r+1}-\theta(B_{2r-1}+B_{2r+3})=0$$

$$h=b_{2m+1}(\theta),\ r=1,\ 2,\ \cdots$$

(8) $$(h-4)B_2-\theta B_4=0$$

$$[h-(2r+2)^2]B_{2r+2}-\theta(B_{2r}+B_{2r+4})=0$$

$$h=b_{2m+2}(\theta),\ r=1,\ 2,\ \cdots$$

正像 15-3(13) 的情形一样，每一个遞推关系可導出一个两相鄰系数之比的展开式，展为包含 h 的無限連分式，代入(5)至(8)式中每一系的第一式以后，可得一 h 的超越方程，能用以确定特征值．例如，在(5)的情形下，h 的超越方程为

$$h=\cfrac{-\theta^2/2}{1-\cfrac{h}{4}-\cfrac{\theta^2/64}{1-\cfrac{h}{16}-\cfrac{\theta^2/576}{1-\cfrac{h}{36}-\cdots}}}\qquad h=a_{2m}(\theta)$$

h 一經确定以后，二相鄰系数之比即可求得．至于要确定系数本身，則除(5)至(8)式外，还应补充以下关系：

(9) $$\sum_{r=0}^{\infty}A_{2r}>0,\quad 2[A_0]^2+\sum_{r=0}^{\infty}[A_{2r}]^2=1$$

(10) $$\sum_{r=0}^{\infty}A_{2r+1}>0,\quad \sum_{r=0}^{\infty}[A_{2r+1}]^2=1$$

(11) $$\sum_{r=0}^{\infty}(2r+1)B_{2r+1}>0,\quad \sum_{r=0}^{\infty}[B_{2r+1}]^2=1$$

$$(12)\quad \sum_{r=0}^{\infty}(2r+2)B_{2r+2}>0,\ \sum_{r=0}^{\infty}[B_{2r+2}]^2=1.$$

这些关系都由 16–4(4) 導來. 关于数值計算的詳細説明可参看 Ince (1932), Blanch (1946) 及 McLachlan (1947). 数值表見 Bickley (1945) 及 NBS 表 (1951)中的参考目錄.

从無限連分式可得

$$(13)\quad \lim_{r\to\infty}\frac{r^2A_{2r+2}}{A_{2r}}=\lim_{r\to\infty}\frac{r^2A_{2r+1}}{A_{2r-1}}$$

$$=\lim_{r\to\infty}\frac{r^2B_{2r+1}}{B_{2r-1}}=\lim_{r\to\infty}\frac{r^2B_{2r+2}}{B_{2r}}=-\frac{\theta}{4}$$

由此可知級数(1)至(4)在整个复数 z 平面上收斂.

將 Mathieu 函数展为 Bessel 函数級数的展开式可从 16–2 (26), (28), (29)中令 $i\mu=0,1$, 并应用 Mathieu 函数的对称性而求得,或从表 2 的積分方程中將 Fourier 展开式 (1) 至 (4)代至積分号下而導出. 下面的展开式是从積分方程導來, 应用的是核在 $\beta=0$, $\beta=\frac{1}{2}\pi$ 时的極限形式:

$$(14)\quad \mathrm{ce}_{2m}(z,\theta)=\frac{\mathrm{ce}_{2m}(\frac{1}{2}\pi,\theta)}{A_0^{2m}(\theta)}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^rA_{2r}J_{2r}(2\theta^{\frac{1}{2}}\cos z)$$

$$=\frac{\mathrm{ce}_{2m}(0,\theta)}{A_0^{2m}(\theta)}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^rA_{2r}I_{2r}(2\theta^{\frac{1}{2}}\sin z)$$

$$(15)\quad \mathrm{ce}_{2m+1}(z,\theta)=\frac{\mathrm{ce}'_{2m+1}(\frac{1}{2}\pi,\theta)}{\theta^{\frac{1}{2}}A_1^{2m+1}(\theta)}$$

$$\times\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^rA_{2r+1}J_{2r+1}(2\theta^{\frac{1}{2}}\cos z)$$

$$=\frac{\mathrm{ce}_{2m+1}(0,\theta)}{\theta^{\frac{1}{2}}A_1^{2m+1}(\theta)}\operatorname{ctn} z\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r(2r+1)A_{2r+1}I_{2r+1}(2\theta^{\frac{1}{2}}\sin z)$$

$$(16)\quad \mathrm{se}_{2m+1}(z,\theta)=\frac{\mathrm{se}_{2m+1}(\frac{1}{2}\pi,\theta)}{\theta^{\frac{1}{2}}B_1^{2m+1}(\theta)}\tan z$$

$$\times\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r(2r+1)B_{2r+1}J_{2r+1}(2\theta^{\frac{1}{2}}\cos z)$$

$$=\frac{se'_{2m+1}(0,\theta)}{\theta^{1/2}B_1^{2m+1}(\theta)}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r B_{2r+1}I_{2r+1}(2\theta^{1/2}\sin z)$$

$$(17)\quad se_{2m+2}(z,\theta)=-\frac{se'_{2m+2}(\tfrac{1}{2}\pi,\theta)}{\theta B_2^{2m+2}(\theta)}\tan z$$

$$\times\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r(2r+2)B_{2r+2}J_{2r+2}(2\theta^{1/2}\cos z)$$

$$=\frac{se'_{2m+2}(0,\theta)}{\theta B_2^{2m+2}(\theta)}\operatorname{ctn} z\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r(2r+2)B_{2r+2}I_{2r+2}(2\theta^{1/2}\sin z)$$

在这些公式中，$e'=de/dz$. 在每一情形下，16–4(18) 中的常数因子 λ 可以令展开式或展开式的導数中的 $z=0$ 或 $z=\frac{1}{2}\pi$ 來确定. Bessel 函数的無窮級数对 z 的所有値都收斂.

Mathieu 函数展为 16–2(33), (35)那种 Bessel 函数積的級数的展开式有很多. 其中最重要的是

$$(18)\quad ce_{2m}(z,\theta)=\frac{p_{2m}}{A_0^{2m}}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r A_{2r}J_r(\theta^{1/2}e^{iz})J_r(\theta^{1/2}e^{-iz})$$

$$(19)\quad ce_{2m+1}(z,\theta)=\frac{p_{2m+1}}{A_1^{2m+1}}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r A_{2r+1}[J_r(\theta^{1/2}e^{iz})J_{r+1}(\theta^{1/2}e^{-iz})$$

$$+J_{r+1}(\theta^{1/2}e^{iz})J_r(\theta^{1/2}e^{-iz})]$$

$$(20)\quad se_{2m+1}(z,\theta)=\frac{s_{2m+1}}{iB_1^{2m+1}}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r B_{2r+1}$$

$$\times[J_r(\theta^{1/2}e^{iz})J_{r+1}(\theta^{1/2}e^{-iz})-J_{r+1}(\theta^{1/2}e^{iz})J_r(\theta^{1/2}e^{-iz})]$$

$$(21)\quad se_{2m+2}(z,\theta)=\frac{s_{2m+2}}{iB_2^{2m+2}}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r B_{2r+2}$$

$$\times[J_r(\theta^{1/2}e^{iz})J_{r+2}(\theta^{1/2}e^{-iz})-J_{r+2}(\theta^{1/2}e^{iz})J_r(\theta^{1/2}e^{-iz})]$$

乘数 p_n 及 s_n 曾由 McLachlan (1947, p. 368 ff.) 确定，他比較了展开式 (18) 至 (21) 二边的漸近形式. 应用 16–7 節的結果有人得出

$$(22)\quad A_0^{2m}p_{2m}=ce_{2m}(0)ce_{2m}(\tfrac{1}{2}\pi)$$

$$\theta^{1/2}A_1^{2m+1}p_{2m+1}=-ce_{2m+1}(0)ce'_{2m+1}(\tfrac{1}{2}\pi)$$

$$\theta^{1/2}B_1^{2m+1}s_{2m+1}=se'_{2m+1}(0)se_{2m+1}(\tfrac{1}{2}\pi)$$

$$\theta B_2^{2m+2} s_{2m+2} = \mathrm{se}'_{2m+2}(0)\,\mathrm{se}'_{2m+2}(\tfrac{1}{2}\pi).$$

(18) 至 (21)中的級数对 z 的所有值都收斂．这些及其他的 Bessel 函数積的級数展开式可从積分方程中求得，方程的核包含 Bessel 函数(McLachlan 1947, p 193 ff).

Ince 曾証明(見 McLachlan 1947，第7章) $\theta\neq 0$ 的 Mathieu 方程的通解不是周期函数．因此，如 $e(z)$是任一第一类 Mathieu 函数，則 Mathieu 方程的任一第二解將是非周期的．由于第二类 Mathieu 函数不甚重要，我們这里不作詳細討論，讀者可參看 McLachlan 的著作或与 16–6 節的修正 Mathieu 方程有关的类似著作．

構造第二类 Mathieu 函数的方法有几种．Floquet 定理的退化形式說明，在 $i\mu$ 是一整数的情形下，設 $e(z)$ 为对应的第一类 Mathieu 函数，則第二个解可确定成 $ze(z)+f(z)$，此处 $f(z)$ 是一周期函数，如 $e(z)$是一余弦級数，則 $f(z)$可以一正弦級数表示，如 $e(z)$为一正弦級数，則 $f(z)$可以一余弦級数表示．另一方法以 16–3(26)那样的積分关系为基礎．最簡單，也是最有效的方法的根据是：如果第一类 Bessel 函数以第二类或第三类 Bessel 函数代替，則本節中的 Bessel 函数級数仍然是 Mathieu 方程的形式解．用这种方法从(14)至(17)式中所得的級数僅当 $|\cos z|>1$ 或 $|\sin z|>1$ 时收斂，对于 z 的实数值，并不適于作第二类或第三类 Mathieu 函数計算之用．反之，Bessel 函数積的級数，其中一个 Bessel 函数是第一类的，另一个是第二类或第三类的，如16–2(35)，对 z 的所有值都收斂，这种級数很適于作数值計算之用．

16–6. 修正馬蒂安函数

微分方程

$$(1)\qquad \frac{d^2u}{dz^2} - [h - 2\theta\cosh(2z)]u = 0$$

称为修正 Mathieu 方程;它与 16-2(1)的区别只在于 z 换成了 iz,因此,16-2 及 16-3 節的結果在应用时应稍有不同. 通常,方程(1)的出現是与 h 取一特征値 a_n 或 b_n 时的 Mathieu 方程相联系.下面我們將只限于討論这种情形.

第一类修正 Mathieu 函数可定义为

$$(2)\qquad \mathrm{Ce}_n(z,\theta)=\mathrm{ce}_n(iz,\theta)\qquad h=a_n(\theta)$$

$$\mathrm{Se}_n(z,\theta)=-i\,\mathrm{se}_n(iz,\theta)\qquad h=b_n(\theta)$$

將修正 Mathieu 函数展为 Fourier 級数, Bessel 函数級数以及 Bessel 函数積的級数等展开式可从上節的結果中推出,見 McLachlan (1947, § 2-30, § 2-31, 第 8 及 13 章).

在 16-5(14)至(17)式中,如將第一类 Bessel 函数换为第二类 Bessel 函数,则得第二类修正 Mathieu 函数,同样,在第三类修正 Mathieu 函数定义中出現的是第三类 Bessel 函数. 在 McLachlan 所用的記法中,以 Fe 表示相当于 Ce 的函数, Ge 表示相当于 Se 的函数,并加一 y 以表示第二类函数,加一 k 表示第三类函数.

第二类修正 Mathieu 函数

$$(3)\qquad \mathrm{Fey}_{2m}(z,\theta)=\frac{\mathrm{ce}_{2m}(\frac{1}{2}\pi,\theta)}{A_0^{2m}(\theta)}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r A_{2r}Y_{2r}(2\theta^{1/2}\cosh z)$$

$$=\frac{\mathrm{ce}_{2m}(0,\theta)}{A_0^{2m}(\theta)}\sum_{r=0}^{\infty}A_{2r}Y_{2r}(2\theta^{1/2}\sinh z)$$

$$=\frac{p_{2m}}{A_0^{2m}}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r A_{2r}J_{2r}(\theta^{1/2}e^{-z})\,Y_{2r}(\theta^{1/2}e^{z}),\qquad h=a_{2m}(\theta).$$

$$(4)\qquad \mathrm{Fey}_{2m+1}(z,\theta)=-\frac{\mathrm{ce}'_{2m+1}(\frac{1}{2}\pi,\theta)}{\theta^{1/2}A_1^{2m+1}(\theta)}$$

$$\times\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r A_{2r+1}Y_{2r+1}(2\theta^{1/2}\cosh z)$$

$$=\frac{\mathrm{ce}_{2m+1}(0,\theta)}{\theta^{1/2}A_1^{2m+1}(\theta)}\operatorname{ctnh} z\sum_{r=0}^{\infty}(2r+1)A_{2r+1}Y_{2r+1}(2\theta^{1/2}\sinh z)$$

$$=\frac{p_{2m+1}}{A_1^{2m+1}}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r A_{2r+1}[J_r(\theta^{1/2}e^{-z})\,Y_{r+1}(\theta^{1/2}e^{z})$$

$$+J_{r+1}(\theta^{1/2}e^{-z})\,Y_r(\theta^{1/2}e^{z})]\qquad h=a_{2m+1}(\theta)$$

(5) $$\mathrm{Gey}_{2m+1}(z,\theta)=\frac{\mathrm{se}_{2m+1}(\frac{1}{2}\pi,\theta)}{\theta^{\frac{1}{2}}B_1^{2m+1}}\tanh z$$

$$\times\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r(2r+1)B_{2r+1}Y_{2r+1}(2\theta^{\frac{1}{2}}\cosh z)$$

$$=\frac{\mathrm{se}'_{2m+1}(0,\theta)}{\theta^{\frac{1}{2}}B_1^{2m+1}}\sum_{r=0}^{\infty}B_{2r+1}Y_{2r+1}(2\theta^{\frac{1}{2}}\sinh z)$$

$$=\frac{s_{2m+1}}{B_1^{2m+1}}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^rB_{2r+1}[J_r(\theta^{\frac{1}{2}}e^{-z})Y_{r+1}(\theta^{\frac{1}{2}}e^{z})$$

$$-J_{r+1}(\theta^{\frac{1}{2}}e^{-z})Y_r(\theta^{\frac{1}{2}}e^{z})],\qquad h=b_{2m+1}(\theta).$$

(6) $$\mathrm{Gey}_{2m+2}(z,\theta)=-\frac{\mathrm{se}'_{2m+2}(\frac{1}{2}\pi,\theta)}{\theta B_2^{2m+2}}\tanh z$$

$$\times\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r(2r+2)B_{2r+2}Y_{2r+2}(2\theta^{\frac{1}{2}}\cosh z)$$

$$=\frac{\mathrm{se}'_{2m+2}(0,\theta)}{\theta B_2^{2m+2}}\coth z\sum_{r=0}^{\infty}(2r+2)B_{2r+2}Y_{2r+2}(2\theta^{\frac{1}{2}}\sinh z)$$

$$=-\frac{s_{2m+2}}{B_2^{2m+2}}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^rB_{2r+2}[J_r(\theta^{\frac{1}{2}}e^{-z})Y_{r+2}(\theta^{\frac{1}{2}}e^{z})$$

$$-J_{r+2}(\theta^{\frac{1}{2}}e^{-z})Y_r(\theta^{\frac{1}{2}}e^{z})],\qquad h=b_{2m+2}(\theta).$$

在上面的每一組展开式中，第一个級数当 $|\cosh z|>1$ 时收斂，第二个級数当 $|\sinh z|>1$ 时收斂，而第三个对 z 的所有值都收斂；在头二个級数中，我們还假設 $\mathrm{Re}\,z>0$.

有几个第三类修正 Mathieu 函数．在 Fey_n 及 Gey_n 的級数中，以 $H_\nu^{(j)}$, $j=1, 2$ 代 Y_ν 所得的函数分别記为 $\mathrm{Me}_n^{(j)}$ 及 $\mathrm{Ne}_n^{(j)}$, $j=1, 2$；在 Fey_n 及 Gey_n 的前二級数中，以 $(-1)^r\pi^{-1}K_{2r}(-iw)$ 代 $Y_{2r}(w)$，以 $(-1)^r\pi^{-1}K_{2r+1}(-iw)$代 $Y_{2r+1}(w)$所得的函数分别記为 Fek_n 及 Gek_n. 从 7–2(5) 及 7–2(17)式可得

$$J_\nu(w)+iY_\nu(w)=H_\nu^{(1)}(w)=\frac{2}{\pi}i^{-\nu-1}K_\nu(-iw),$$

因此，各修正 Mathieu 函数可从下列关系中得出：

(7) $$\mathrm{Ce}_{2m}(z,\theta)+i\mathrm{Fey}_{2m}(z,\theta)=\mathrm{Me}_{2m}^{(1)}(z,\theta)=-2i\,\mathrm{Fek}_{2m}(z,\theta)$$

$$\mathrm{Ce}_{2m+1}(z,\theta)+i\mathrm{Fey}_{2m+1}(z,\theta)=\mathrm{Me}^{(1)}_{2m+1}(z,\theta)$$
$$=-2\,\mathrm{Fek}_{2m+1}(z,\theta)$$
$$\mathrm{Se}_{2m+1}(z,\theta)+i\,\mathrm{Gey}_{2m+1}(z,\theta)=\mathrm{Ne}^{(1)}_{2m+1}(z,\theta)$$
$$=-2\,\mathrm{Gek}_{2m+2}(z,\theta)$$
$$\mathrm{Se}_{2m+2}(z,\theta)+i\,\mathrm{Gey}_{2m+2}(z,\theta)=\mathrm{Ne}^{(1)}_{2m-2}(z,\theta)$$
$$=-2i\,\mathrm{Gek}_{2m+2}(z,\theta).$$

关于各第三类修正 Mathieu 函数的展开式，参看 McLachlan (1947, § 8–14, 8–30, 13–30, 13–40).

当 $z\to\infty$ 时，修正 Mathieu 函数的渐近性态可从它們的 Bessel 函数級数展开式或 Bessel 函数積的級数展开式中得出.

在 Mathieu 函数与修正 Mathieu 函数之間，以及在修正 Mathieu 函数本身之間，有着很多的積分关系. 像 16–4(18) 式中一样，設 $N(z,\zeta)$ 是区間 (a,b) 上的核，則

$$\int_b^a N(iz,\zeta)e(\zeta)\,d\zeta$$

是第一类修正 Mathieu 函数的一个倍数. 从 16–4 節表 2 的核在 $\beta=0$, $\beta=\frac{1}{2}\pi$ 时的極限情形中導出的積分关系見 McLachlan (1947, § 10–20).

設 $\theta>0$, $z>0$, 則積分

$$\int_0^\infty \exp(2i\theta^{1/2}\cosh z\cosh\zeta)\,\mathrm{Ce}_n(\zeta,\theta)\,d\zeta$$

$$\int_0^\infty \sinh z\sinh\zeta\exp(2i\theta^{1/2}\cosh z\cosh\zeta)\,\mathrm{Se}_{n+1}(\zeta,\theta)\,d\zeta$$

都收斂. 如果第一类修正 Mathieu 函数以其 Fourier 級数代替，而后將所得積分用 7–12(21) 式計值，則得下列積分关系式

(8)　$\pi A_0^{2m}\mathrm{Fek}_{2m}(z,\theta)$

$$=\mathrm{ce}_{2m}(\tfrac{1}{2}\pi,\theta)\int_0^\infty \exp(2i\theta^{1/2}\cosh z\cosh\zeta)\,\mathrm{Ce}_{2m}(\zeta,\theta)\,d\zeta$$

$$\theta>0,\ z>0$$

(9) $$\pi A_1^{2m+1}\mathrm{Fek}_{2m+1}(z,\theta)=-\theta^{-1/2}\mathrm{ce}'_{2m+1}(\tfrac{1}{2}\pi,\theta)\times\int_0^\infty \exp(2i\theta^{1/2}\cosh z\cosh\zeta)\mathrm{Ce}_{2m+1}(\zeta,\theta)d\zeta$$

$\theta>0,\ z>0$

(10) $$\pi B_1^{2m+1}\mathrm{Gek}_{2m+1}(z,\theta)=-2i\,\mathrm{se}_{2m+1}(\tfrac{1}{2}\pi,\theta)\times\int_0^\infty \sinh z\sinh\zeta\exp(2i\theta^{1/2}\cosh z\cosh\zeta)\mathrm{Se}_{2m+1}(\zeta,\theta)d\zeta$$

$\theta>0,\ z>0$

(11) $$\pi B_2^{2m+2}\mathrm{Gek}_{2m+2}(z,\theta)=-2i\,\theta^{-1/2}\mathrm{se}'_{2m+2}(\tfrac{1}{2}\pi,\theta)\times\int_0^\infty \sinh z\sinh\zeta\exp(2i\theta^{1/2}\cosh z\cosh\zeta)\mathrm{Se}_{2m+2}(\zeta,\theta)d\zeta$$

$\theta>0,\ z>0.$

如在(8)至(11)式中，用方程(7)來分开其实部和虚部，則得如下積分关系．

(12) $$\pi A_0^{2m}\mathrm{Fey}_{2m}(z,\theta)=-2\,\mathrm{ce}_{2m}(\tfrac{1}{2}\pi,\theta)\times\int_0^\infty \cos(2\theta^{1/2}\cosh z\cosh\zeta)\mathrm{Ce}_{2m}(\zeta,\theta)d\zeta$$

$\theta>0,\ z>0$

(13) $$\pi A_1^{2m+1}\mathrm{Fey}_{2m+1}(z,\theta)=2\theta^{-1/2}\mathrm{ce}'_{2m+1}(\tfrac{1}{2}\pi,\theta)\times\int_0^\infty \sin(2\theta^{1/2}\cosh z\cosh\zeta)\mathrm{Ce}_{2m+1}(\zeta,\theta)d\zeta$$

$\theta>0,\ z>0.$

(14) $$\pi B_1^{2m+1}\mathrm{Gey}_{2m+1}(z,\theta)=4\,\mathrm{se}_{2m+1}(\tfrac{1}{2}\pi,\theta)\times\int_0^\infty \sinh z\sinh\zeta\cos(2\theta^{1/2}\cosh z\cosh\zeta)\mathrm{Se}_{2m+1}(\zeta,\theta)d\zeta$$

$\theta>0,\ z>0$

(15) $$\pi B_2^{2m+2}\mathrm{Gey}_{2m+2}(z,\theta)=-4\,\theta^{-1/2}\mathrm{se}'_{2m+2}(\tfrac{1}{2}\pi,\theta)\times\int_0^\infty \sinh z\sinh\zeta\sin(2\theta^{1/2}\cosh z\cosh\zeta)\mathrm{Se}_{2m+2}(\zeta,\theta)d\zeta$$

$\theta>0,\ z>0.$

以及積分方程：

(16) $\pi A_0^{2m}\mathrm{Ce}_{2m}(z,\theta)$

$$=2\,\mathrm{ce}_{2m}(z,\theta)\int_0^\infty \sin(2\theta^{1/2}\cosh z\cosh\zeta)\mathrm{Ce}_{2m}(\zeta,\theta)d\zeta$$

$\theta>0,\ z>0$

(17) $\pi A_1^{2m+1}\mathrm{Ce}_{2m+1}(z,\theta)=2\theta^{-1/2}\mathrm{ce}'_{2m+1}(\tfrac{1}{2}\pi,\theta)$

$$\times\int_0^\infty \cos(2\theta^{1/2}\cosh z\cosh\zeta)\mathrm{Ce}_{2m+1}(\zeta,\theta)d\zeta$$

$\theta>0,\ z>0$

(18) $\pi B_1^{2m+1}\mathrm{Se}_{2m+1}(z,\theta)=-4\,\mathrm{se}_{2m+1}(\tfrac{1}{2}\pi,\theta)$

$$\times\int_0^\infty \sinh z\sinh\zeta\sin(2\theta^{1/2}\cosh z\cosh\zeta)\mathrm{Se}_{2m+1}(\zeta,\theta)d\zeta$$

$\theta>0,\ z>0$

(19) $\pi B_2^{2m+2}\mathrm{Se}_{2m+2}(z,\theta)=-4\theta^{1/2}\mathrm{se}'_{2m+2}(\tfrac{1}{2}\pi,\theta)$

$$\times\int_0^\infty \sinh z\sinh\zeta\cos(2\theta^{1/2}\cosh z\cosh\zeta)\mathrm{Se}_{2m+2}(\zeta,\theta)d\zeta$$

$\theta>0,\ z>0.$

关于負 θ 的積分关系見 McLachlan (1947, 第 10 章)，关于核包含 Bessel 函数的積分关系見 McLachlan (1947, 第 10 章)及Meixner (1951 a). Meixner (ibid) 还給出了几个包含 Mathieu 函数積的積分关系.

16-7. 近似式和漸近形式

|θ|很小时的近似式

当 $\theta=0$ 时，Mathieu 方程化为一常系数微分方程，且

(1) $a_n(0)=b_n(0)=n^2$

$\mathrm{ce}_0(z,0)=2^{-1/2},\quad \mathrm{ce}_n(z,0)=\cos(nz),$

$\mathrm{se}_n(z,0)=\sin(nz)\qquad n=1,2,\cdots$

从(1)出發，可將特征値及特征函数展为 θ 的冪. Strutt (1932, p. 36)曾証明

(2) $a_n(\theta)=n^2+O(|\theta|^n),\ b_n(\theta)=n^2+O(|\theta|^n)\qquad \theta\to0,$

因此，屬于 ce_n 及 se_n 的特征曲綫將在点 $h=n^2, \theta=0$ 上作 $n-1$ 次接触；这一点是这二特征曲綫的唯一公共点．Strutt (1932, p. 31ff) 还給出了 $a_n(\theta)$ 的展开式，一直到 θ^6，$\mathrm{ce}_n(z, \theta)/A_n^n$ 的展开式，一直到 θ^4，以及某些系数 A_r^n/A_n^n 的展开式，一直到 θ^4 或 θ^5．(2) 式中 O 項的数值界限由 Weinstein (1935) 提出．

$|z|$ 很大时的漸近形式

当 $\mathrm{Im}\, z\to\infty$ 时 Mathieu 函数的漸近性态或 $\mathrm{Re}\, z\to\infty$ 时修正 Mathieu 函数的漸近性态可从 Bessel 函数展开式中应用 Meixner (1949 a) 所証明的一条普遍定理來确定，这一定理說明在一定的条件下，像 16-6(3) 式那种級数的漸近展开式可在式子右边代入 Bessel 函数的漸近展开式而求得．

当 $\mathrm{Re}\, z\to\infty$ 时，为了求得修正 Mathieu 函数的漸近展开式的首項，注意，根据 7-13(3)，有

$$J_\nu(2\theta^{1/2}\cosh z)\sim\theta^{-1/4}(\pi\,\mathrm{ch}\, z)^{-1/2}\cos(2\theta^{1/2}\mathrm{ch}\, z-\tfrac{1}{2}\nu\pi-\tfrac{1}{4}\pi)$$
$$\sim(\tfrac{1}{2}\pi)^{-1/2}\theta^{-1/4}e^{-1/2 z}\cos(\theta^{1/2}e^z-\tfrac{1}{2}\nu\pi-\tfrac{1}{4}\pi)$$
$$\mathrm{Re}\, z\to\infty,\quad -\pi<\mathrm{Im}\, z<\pi.$$

將此代入 16-5(14) 式，得

$$\mathrm{Ce}_{2m}(z,\theta)=\mathrm{ce}_{2m}(iz,\theta)$$
$$\sim\frac{\mathrm{ce}_{2m}(0)\,\mathrm{ce}_{2m}(\tfrac{1}{2}\pi)}{(\tfrac{1}{2}\pi)^{1/2}\theta^{1/4}A_0^{2m}}e^{-1/2 z}\cos(\theta^{1/2}e^z-\tfrac{1}{4}\pi).$$

另一方面，应用 16-5(18)，并注意，当 $\mathrm{Re}\, z$ 很大时，級数的首項控制其余的項，有

$$\mathrm{Ce}_{2m}(z,\theta)-\mathrm{ce}_{2m}(iz,\theta)\sim p_{2m}(\tfrac{1}{2}\pi)^{-1/2}\theta^{-1/4}e^{-1/2 z}\cos(\theta^{1/2}z^2-\tfrac{1}{4}\pi).$$

比較最后这二方程即可得 16-5(22) 中的第一个关系，其余的关系可类似地肯定．为了从 16-6(3) 至 (6) 中确定第二类修正 Mathieu 函数的漸近形式，可用 7-13(4) 代替 7-13(3)，这相当于用 $\sin(\theta^{1/2}e^z-\tfrac{1}{2}\nu\pi-\tfrac{1}{4}\pi)$ 代替 $\cos(\theta^{1/2}e^z-\tfrac{1}{2}\nu\pi-\tfrac{1}{4}\pi)$．于是可得下列結果：

(3) $\mathrm{Ce}_{2m}(z,\theta)\sim p_{2m}(\tfrac{1}{2}\pi)^{-1/2}\theta^{-1/4}e^{-1/2z}\cos(\theta^{1/2}e^{z}-\tfrac{1}{4}\pi)$

$\mathrm{Ce}_{2m+1}(z,\theta)\sim p_{2m+1}(\tfrac{1}{2}\pi)^{-1/2}\theta^{-1/4}e^{-1/2z}\cos(\theta^{1/2}e^{z}-\tfrac{3}{4}\pi)$

$\mathrm{Se}_{2m+1}(z,\theta)\sim s_{2m+1}(\tfrac{1}{2}\pi)^{-1/2}\theta^{-1/4}e^{-1/2z}\cos(\theta^{1/2}e^{z}-\tfrac{3}{4}\pi)$

$\mathrm{Se}_{2m+2}(z,\theta)\sim s_{2m+2}(\tfrac{1}{2}\pi)^{-1/2}\theta^{-1/4}e^{-1/2z}\cos(\theta^{1/2}e^{z}-\tfrac{1}{4}\pi)$

$\mathrm{Re}\, z\to\infty,\ -\pi<\tfrac{1}{2}\arg\theta+\mathrm{Im}\, z<\pi.$

(4) $\mathrm{Fey}_{2m}(z,\theta)\sim p_{2m}(\tfrac{1}{2}\pi)^{-1/2}\theta^{-1/4}e^{-1/2z}\sin(\theta^{1/2}e^{z}-\tfrac{1}{4}\pi)$

$\mathrm{Fey}_{2m+1}(z,\theta)\sim p_{2m+1}(\tfrac{1}{2}\pi)^{-1/2}\theta^{-1/4}e^{-1/2z}\sin(\theta^{1/2}e^{z}-\tfrac{3}{4}\pi)$

$\mathrm{Gey}_{2m+1}(z,\theta)\sim s_{2m+1}(\tfrac{1}{2}\pi)^{-1/2}\theta^{-1/4}e^{-1/2z}\sin(\theta^{1/2}e^{z}-\tfrac{3}{4}\pi)$

$\mathrm{Gey}_{2m+2}(z,\theta)\sim s_{2m+2}(\tfrac{1}{2}\pi)^{-1/2}\theta^{-1/4}e^{-1/2z}\sin(\theta^{1/2}e^{z}-\tfrac{1}{4}\pi)$

$\mathrm{Re}\, z\to\infty,\ -\pi<\tfrac{1}{2}\arg\theta+\mathrm{Im}\, z<\pi.$

e^{z} 或 $\cosh z$ 的降冪漸近級数可从修正 Mathieu 方程 16–6(1) 中求得，見 McLachlan (1947, 第 11 章).

$|\theta|$很大时的漸近形式

在 θ 的大实数値下，Mathieu 函数以及 h 的特征値的漸近性态曾由 Jeffreys, Goldstein, Ince 研究过. 这些研究的成果，以及参考文献見 Strutt (1932, p. 37 ff)及 McLachlan (1947, § 11–40～11–44).

主要的結果如下:

(5) $a_{n}(\theta)\sim b_{n+1}(\theta)\sim-2\theta+2(2n+1)\theta^{1/2}-\tfrac{1}{4}(2n^{2}+2n+1)$

$\theta\to\infty$

(6) $\mathrm{ce}_{n}(z,\theta)\sim C_{n}(\cos z)^{-n-1}\{[\cos(\tfrac{1}{2}z+\tfrac{1}{4}\pi)]^{2n+1}\exp(2\theta^{1/2}\sin z)$

$+[\sin(\tfrac{1}{2}z+\tfrac{1}{4}\pi)]^{2n+1}\exp(-2\theta^{1/2}\sin z)\}$

$\mathrm{se}_{n+1}(z,\theta)\sim S_{n+1}(\cos z)^{-n-1}\{[\cos(\tfrac{1}{2}z+\tfrac{1}{4}\pi)]^{2n+1}$

$\times\exp(2\theta^{1/2}\sin z)$

$-[\sin(\tfrac{1}{2}z+\tfrac{1}{4}\pi)]^{2n+1}\exp(-2\theta^{1/2}\sin z)\}$

$-\tfrac{1}{2}\pi<z<\tfrac{1}{2}\pi,\ \theta\to\infty$

(7) $\mathrm{Ce}_{n}(z,\theta)\sim C_{n}2^{1/2-n}(\mathrm{ch}\, z)^{-1/2}$

$\times\cos[2\theta^{1/2}\mathrm{sh}\, z-(2n+1)\tan^{-1}(\tanh\tfrac{1}{2}z)]$

$$\mathrm{Se}_{n+1}(z,\theta)\sim S_{n+1}2^{1/2-n}(\cosh z)^{-1/2}$$
$$\times\sin[2\theta^{1/4}\sinh z-(2n+1)\tan^{-1}(\tanh\tfrac{1}{2}z)]$$
$$z>0,\ \theta\to\infty.$$

对于大的 z，比較(7)及(3)可得

$$(8)\qquad C_n=(-1)^m 2^{n-1/2}\theta^{-1/4}\pi^{-1/2}p_n$$
$$S_n=(-1)^m 2^{n-3/2}\theta^{-1/4}\pi^{-1/2}s_n$$

其中 $m=\left[\frac{n}{2}\right]$，也就是說，$n=2m$ 或 $n=2m+1$ 根据 n 是偶数或奇数而定.

Langer (1934)研究了 θ 是很大实数而 z 可为复数时 Mathieu 函数的漸近性态.

方程(6)說明了 $-1<\cos z<1$ 时的 Mathieu 函数的性态，方程(7)說明了 $\cos z>1$ 时的性态. 这二公式在 $\cos z=1$ 附近都不成立. 为了求得一个在包括这一点的范圍內有效的公式，Meixner (1948) 及 Sips (1949) 將 Mathieu 函数展为抛物柱函数的級数. 这种展开式的形式为

$$(9)\qquad \mathrm{ce}_n(z,\theta)=\sum_{r=0}^{\infty}\alpha_r D_r(2\theta^{1/4}\cos z)$$
$$\mathrm{se}_{n+1}(z,\theta)=\sin z\sum_{r=0}^{\infty}\beta_r D_r(2\theta^{1/4}\cos z)$$

式中，如 n 为偶数，则 r 取偶整数值，如 n 为奇数，则 r 取奇整数值，α_r, β_r 滿足五項遞推关系. 当 θ 很大时，展开式(9)中的控制項是对应于 $r=n$ 的那些項，因而有

$$(10)\qquad \mathrm{ce}_n(z,\theta)\sim\alpha_n D_n(2\theta^{1/4}\cos z)$$
$$\mathrm{se}_{n+1}(z,\theta)\sim\beta_n\sin z\,D_n(2\theta^{1/4}\cos z)\qquad \theta\to\infty$$

如令 $z=\frac{1}{2}\pi$ (必要时可在微分之后应用)并应用从 8-2(4)式所得的 $D_\nu(0)$, $D'_\nu(0)$ 的值，卽可确定 α_n 及 β_n.

16-8. 級数，積分式，展开問題

包含 Mathieu 函数的很多已知無窮級数可解释为波动方程的

解的叠加．像在 16-1-1 節中一样，設 x, y 为笛卡尔坐标，u, v 为椭圓坐标，ρ, ϕ 为極坐标，因此

(1) $\qquad x+iy=c\cosh(u+iv)=\rho e^{i\phi}.$

二維波动方程

(2) $$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}+\kappa^2 W=0$$

在椭圓坐标系中的典型解为 $U(u)V(v)$，此处 V 为一 Mathieu 函数，U 为一連帶 Mathieu 函数，且在 Mathieu 方程中，

(3) $\qquad \theta=(\frac{1}{2}\kappa c)^2.$

在極坐标中，典型解为

$$Z_\nu(\kappa\rho)e^{i\nu\phi}$$

其中 Z_ν 为一 ν 階 Bessel 函数．椭圓柱面波可由圓柱面波叠加而成，而圓柱面波也可由椭圓柱面波叠加而成，根据这种关系，可導出很多重要的無窮級数；同样，椭圓柱面波也可与平面波联系．

把函数

(4) $$W=\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r A_{2r}^{2m}(\theta)H_{2r}^{(j)}(\kappa\rho)\cos(2r\phi) \qquad j=1, 2$$

作为 u 及 v 的函数，从(1)，有

(5) $\qquad \kappa\rho=2[\theta\cosh(u+iv)\cosh(u-iv)]^{\frac{1}{2}}$

$$e^{2i\phi}=\frac{\cosh(u+iv)}{\cosh(u-iv)}.$$

因此，(4)是一形如 16-2(30)的展开式，对于实数的 u, v（或，更一般地說，对于 $|\mathrm{Im}\, v|<|\mathrm{Re}\, u|$），及不变的 u，它表示 $\mathrm{ce}_{2m}(v, \theta)$ 的一个倍数．因为

$$W=U(u)\,\mathrm{ce}_{2m}(v, \theta),$$

故从 16-1-1 知 $U(u)$是一連帶 Mathieu 函数．(4) 式在 $u\to\infty$，因而是 $\rho\to\infty$ 时的漸近性态表明 $U(u)$必須是第三类連帶 Mathieu 函数，事实上

$$W=\mathrm{const.}\ \mathrm{Me}_{2m}^{(j)}(u, \theta)\,\mathrm{ce}_{2m}(v, \theta) \qquad j=1, 2.$$

要确定常数因子,可令 $u\to\infty$, $\rho\to\infty$, 对左边应用 7-13(1), (2) 式,对右边应用 16-7(3), (4). 这一計算,以及对于有 ce_{2m+1}, se_{2m+1}, se_{2m+2} 的类似計算可導出下面的展开式,其中 Mathieu 函数符号中及系数中的 θ 都省略不寫.

$$(6)\qquad Me_{2m}^{(j)}(u)\,ce_{2m}(v)=p_{2m}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r A_{2r}^{2m}H_{r2}^{(j)}(\kappa\rho)\cos(2r\phi)$$

$$Me_{2m+1}^{(j)}(u)\,ce_{2m+1}(v)=p_{2m+1}$$

$$\times\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r A_{2r+1}^{2m+1}H_{2r+1}^{(j)}(\kappa\rho)\cos[(2r+1)\phi]$$

$$Ne_{2m+1}^{(j)}(u)\,se_{2m+1}(v)=s_{2m+1}$$

$$\times\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r B_{2r+1}^{2m+1}H_{2r+1}^{(j)}(\kappa\rho)\sin[(2r+1)\phi]$$

$$Ne_{2m+2}^{(j)}(u)\,se_{2m+2}(v)=-s_{2m+2}$$

$$\times\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r B_{2r+2}^{2m+2}H_{2r+2}^{(j)}(\kappa\rho)\sin[(2r+2)\phi]$$

$$j=1,2.$$

此处的 p 及 s 和 16-5(22)式中的具有同样意义.

如 $v=0$ 及 $v=\frac{1}{2}\pi$, 則(6)式化成 16-5(14)-(17), 当 $u\to\infty$ 时,(6)变成 16-5(1)-(4), 因此, Mathieu 函数的最重要級数展开式都是(6)的特例或極限情形.

Meixner (1949 a, 还可參看 Schäfke 1953) 將(6)式按二方面加以推廣. 他所用的極坐标,其極并不与共焦橢圓族及双曲綫族的中心相重合,他把積 $U(u)V(v)$ 展开,此处 $V(v)$ 是一般 Mathieu 方程(即具有任意給定的 h 及 θ)的第一类解, $U(u)$ 是对应的修正方程的第三类解. 他的展开式形如

$$U(u)V(v)=\sum_{r=-\infty}^{\infty}d_r H_{r-i\mu}^{(j)}(\kappa\rho)e^{(r-i\mu)i\phi}$$

其中

$$\kappa\rho=2\{\theta[\cosh(u+iv)-\alpha][\cosh(u-iv)-\alpha]\}^{\frac{1}{2}}$$

$$e^{2i\theta}=\frac{\cosh(u+iv)-a}{\cosh(u-iv)-a}$$

μ 是一般 Mathieu 方程的特征指数．系数 d_r 在 Meixner 著作中为

$$d_r=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n c_n J_{2n-r}(2a\theta)$$

此处的 c_n 是 16-2(8) 中的系数，$V(z)$ 是一般 Mathieu 方程的一个用 16-2(8) 表示的解．

橢圓柱面波用平面波的叠加來表示的表示式可導出積分式，比導出級数更好．考察函数

(7) $$W=\int_0^{2\pi}\exp[i\kappa(x\cos\alpha+y\sin\alpha)]\,\mathrm{ce}_n(\alpha,\theta)\,d\alpha$$

把它作为 u, v 的函数，从 16-4 節表 2 可知，如 u 固定，則 W 是 $\mathrm{ce}_n(v)$ 的一个倍数，如 v 固定，則是 $\mathrm{Ce}_n(u)$ 的倍数，因此

$$W=\text{const.}\ \mathrm{Ce}_n(u)\ \mathrm{ce}_n(v)$$

要确定式中的常数，可命 W 或 $\partial W/\partial v$ 中的 $x=y=0$，卽 $u=0$，或 $v=\frac{1}{2}\pi$，根据 n 是偶数或奇数而定．对于 se_{n+1}，应用同样的方法，并应用 16-4 節表 1 的对称关系，这样就得

(8) $$\mathrm{Ce}_{2m}(u)\,\mathrm{ce}_{2m}(v)=2\pi^{-1}p_{2m}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos(\kappa x\cos\alpha)\cos(\kappa y\sin\alpha)\,\mathrm{ce}_{2m}(\alpha)\,d\alpha$$

$$\mathrm{Ce}_{2m+1}(u)\,\mathrm{ce}_{2m+1}(v)=2\pi^{-1}p_{2m+1}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin(\kappa x\cos\alpha)\cos(\kappa y\sin\alpha)\,\mathrm{ce}_{2m+1}(\alpha)\,d\alpha$$

$$\mathrm{Se}_{2m+1}(u)\,\mathrm{se}_{2m+1}(v)=2\pi^{-1}s_{2m+1}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos(\kappa x\cos\alpha)\sin(\kappa y\sin\alpha)\,\mathrm{se}_{2m+1}(\alpha)\,d\alpha$$

$$\mathrm{Se}_{2m+2}(u)\,\mathrm{se}_{2m+2}(v)=-2\pi^{-1}s_{2m+2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin(\kappa x\cos\alpha)\sin(\kappa y\sin\alpha)\,\mathrm{se}_{2m+2}(\alpha)\,d\alpha$$

其中 x, y 見 16-1(1)，θ 見 (3)，p 及 s 見 16-5(22)．

包含 Bessel 函数而不是三角函数的类似積分式曾由 Sips (1953, 1954) 導出.

上述关系式的反演推出了 Mathieu 函数積的無窮級数的和. 方程(8)可作为是把

$$\frac{\cos}{\sin}(\kappa x\cos\alpha)\frac{\cos}{\sin}(\kappa y\sin\alpha)$$

展开为 Mathieu 函数的級数展开式中确定其 Fourier 系数之用; 因此就導出了如下的展开式.

$$(9)\qquad \cos(\kappa x\cos\alpha)\cos(\kappa y\sin\alpha)$$

$$=2\sum_{m=0}^{\infty}p_{2m}^{-1}\mathrm{ce}_{2m}(\alpha)\,\mathrm{Ce}_{2m}(u)\,\mathrm{ce}_{2m}(v)$$

$$\sin(\kappa x\cos\alpha)\cos(\kappa y\sin\alpha)$$

$$=2\sum_{m=0}^{\infty}p_{2m+1}^{-1}\mathrm{ce}_{2m+1}(\alpha)\,\mathrm{Ce}_{2m+1}(u)\,\mathrm{ce}_{2m+1}(v)$$

$$\cos(\kappa x\cos\alpha)\sin(\kappa y\sin\alpha)$$

$$=2\sum_{m=0}^{\infty}s_{2m+1}^{-1}\mathrm{se}_{2m+1}(\alpha)\,\mathrm{Se}_{2m+1}(u)\,\mathrm{se}_{2m+1}(v)$$

$$\sin(\kappa x\cos\alpha)\sin(\kappa y\sin\alpha)$$

$$=-2\sum_{m=0}^{\infty}s_{2m+2}^{-1}\mathrm{se}_{2m+2}(\alpha)\,\mathrm{Se}_{2m+2}(u)\,\mathrm{se}_{2m+2}(v)$$

这里 x, y, κ, c 及 u, v, θ 仍以 16–1(1) 及 16–8(3) 式联系, θ 在 Mathieu 函数的符号中省略不寫, p, s 見 16–5(22). 如將(9)分别对 α, u 或 v 導微, 并选定某些参数的特殊值, 就可導出很多展开式. 其中有些列出在 McLachlan 的著作中 (1947, 10–60, 10–61 節).

(6)式的反演可導出

$$H_{\nu}^{(j)}(\kappa\rho)\frac{\cos}{\sin}(\nu\phi)\qquad j=1,2$$

的展开式, 展为 Mathieu 函数及連帶 Mathieu 函数積的級数(見 Sip 1953, 1954), 所得結果可以解釋为橢圓柱面波的叠加所生成

的圓柱面波. Sips 还導出了包含四个 Mathieu 函数之積的展开式;这些展开式在圓柱的軸不同于橢圓柱軸的情形下就很需用. 推廣到包含一般 Mathieu 方程的解的積的展开結果曾由 Schäfke (1953)提出过.

最后,若干个橢圓柱面波的叠合生成橢圓柱面波的規則可以導出 Mathieu 函数的所謂加法定理(Schäfke 1953).

Ince (1939)研究了 Mathieu 函数的無窮級数以及 Mathieu 函数之積的無窮級数的另一个类型. 他用(9)的特殊情形以及(9)的導数的特殊情形把

$$\frac{\mathrm{se}_{2m+1}(z)}{\sin z}$$

展为級数 $\sum \alpha_r \mathrm{ce}_{2r}(z)$, 并給出了許多包含 Mathieu 函数及其導数与三角函数組合的展开式. 如 $\theta=0$, 則 Ince 的展开式簡化为三角函数的加法定理及微分公式,以及其他的三角恆等式.

具有三角函数核的積分关系見 16-4,16-6 節及(8)式及 McLachlan (1947, 第 10, 14 章). 包含 Bessel 函数的積分見 McLachlan (1947, 第 10 章), Sips (1949 a), Meixner (1951 a), Schäfke (1953). Schäfke 曾計算了包含三 Mathieu 函数之積的積分. Meixner 及 Schäfke 都曾把他們的結果推廣到一般 Mathieu 方程的解.

Mathieu 函数的正交性質見 16-4(15), (16), (17). 从 Sturm-Liouville 問題的一般理論可知 $\{\mathrm{ce}_{2m}\}$, $\{\mathrm{ce}_{2m+1}\}$, $\{\mathrm{se}_{2m+1}\}$, $\{\mathrm{se}_{2m+2}\}$ 中的每一系在$(0, \frac{1}{2}\pi)$上是完全的, $\{\mathrm{ce}_n\}$, $\{\mathrm{se}_{n+1}\}$ 中的每一系在$(0, \pi)$上是完全的,系 $\{\mathrm{ce}_n, \mathrm{se}_{n+1}\}$在$(0, 2\pi)$上是完全的,此处 $m, n=0, 1, 2, \cdots$. 凡是可以展为 Fourier 級数的任意函数也能展为 Mathieu 函数的級数. 在后一展开式中的系数可用 Mathieu 函数的正交性質來計算. 这种展开式的重要例子是(9)及(圓)柱面波展为 Mathieu 函数級数的展开式.

一般 Mathieu 方程解(非周期的)的特征值問題曾由 Strutt (1943)研究过，他給出了特征值的边界，漸近式，展开公式及展开定理. 在 Strutt 的著作中，16-2(1)中的 $\cos(2z)$ 用任一实周期函数(周期为 p)代替，这一函数可展为收斂的 Fourier 級数: 所得的微分方程称为 Hill 方程. Strutt 把 Hill 方程与边界条件

$$u(z_0+p)=\sigma u(z_0),\quad u'(z_0+p)=\sigma u'(z_0)$$

組成的边值問題称为 Hill 問題，此处 σ 是已知的(在周期 Mathieu 函数的情形下，$\sigma=\pm 1$).

展为 Mathieu 函数及連帶 Mathieu 函数之積的級数展开式与二維波动方程(2)有关. 設我們在橢圓 $u=u_0$ 的內部考察方程(2)，所加的边界条件为 $W(u_0, v)=0$ (适于橢圓形薄膜的振动問題). (2)的解形为

$$\psi c_n(u, v)=\mathrm{Ce}_n(u, \theta)\mathrm{ce}_n(v, \theta)$$

$$\psi s_{n+1}(u, v)=\mathrm{Se}_{n+1}(u, \theta)\mathrm{se}_{n+1}(v, \theta), \qquad n=0, 1, \cdots$$

使 $\mathrm{Ce}_n(u_0, \theta)=0$ 或 $\mathrm{Se}_{n+1}(u_0, \theta)=0$ 的那些 κ 值就是(2)在区域 $u\leqslant u_0$ 上的特征值. 这些特征值相当于 θ 的某些特征值，所得的特征函数可記为 ψc_n^m, ψs_{n+1}^m, $n=0, 1, 2, \cdots$, $m=1, 2, \cdots$. 面積元素为 $[\cosh(2u)-\cos(2v)]\,du\,dv$, 于是有如下的正交性質:

$$\int_0^{u_0}\int_0^{2\pi}\psi c_n^m \psi c_k^l[\cosh(2u)-\cos(2v)]du\,dv$$

$$=\int_0^{u_0}\int_0^{2\pi}\psi s_{n+1}^m \psi s_{k+1}^l[\cosh(2u)-\cos(2v)]du\,dv=0$$

$$k, n=0, 1, \cdots;\ m, l=1, 2, \cdots;\ k\neq n \text{ 或 } m\neq l$$

$$\int_0^{u_0}\int_0^{2\pi}\psi c_n^m \psi s_{k+1}^l[\cosh(2u)-\cos(2v)]du\,dv=0$$

$$k, n=0, 1, \cdots;\ l, m=1, 2, \cdots$$

关于包含 $[\psi c_n^m]^2$ 及 $[\psi s_n^m]^2$ 的積分的計算可參看 McLachlan (1947, § 9-40). 由此可以導出一个任意函数在区域 $u\leqslant u_0$ 上展开为 ψc 及 ψs 的級数展开式. 对于其他边界条件，也有相应的展开式.

球体波函数

16-9. 球体波函数的微分方程及其解

我們采用

$$(1)\qquad (1-z^2)\frac{d^2y}{dz^2}-2z\frac{dy}{dz}+[\lambda+4\theta(1-z^2)-\mu^2(1-z^2)^{-1}]y=0$$

作为球体波函数的微分方程的标准形式. 現在尙沒有一般公認的标准形式. Meixner 在其最近的著作(1950, 1951)中,应用(1),以 $4\theta=\gamma^2$; Bouwkamp, Strutt (1932) 及 Meixner (在他 1944, 1947, 1948 的早期作品中)分别以 k^2z^2, $-k^2c^2z^2$ 及 $-\gamma^2z^2$ 代替 $4\theta(1-z^2)$, 因此他們的 λ 相当于(1)中的 $\lambda+4\theta$. 在这一節中,我們將把 θ, λ, μ 作为已知的实或复參数,把 z 作为复变数. μ 称为球体波函数的階.

令

$$(2)\qquad z=\cos v$$

則得

$$(3)\qquad \frac{d^2y}{dv^2}+\operatorname{ctn} v\frac{dy}{dv}+[\lambda+4\theta(\sin v)^2-\mu^2(\csc v)^2]y=0$$

称为球体波函数的微分方程的三角形式[并見 16-1(11), (12), (16), (17)].

我們將討論(1)的几种特殊情形和極限情形,因为这种情形表示某些適当解的选擇.

設 $\theta=0$, 卽在波动方程 16-1(9) 及 (14) 中的 $\kappa=0$, 則方程(1)化成 Lagendre 方程 3-2(1), 此时 $\lambda=\nu(\nu+1)$. 在剖割 z-平面上的解見 3-2 節,在剖割上的適当解見 3-4 節.

如 $\mu=\frac{1}{2}$, 則經簡單运算后可知,用变数 v 表示时, $(\sin v)^{-\frac{1}{2}}y(v)$ 滿足 Mathieu 方程, 此时 θ 与 16-2(1) 中的同意义, 且 $h=\lambda+\frac{1}{4}+2\theta$,

以

(4) $\zeta = 2\theta^{1/2} z$

作为自变量，方程(1)变为

(5) $$(\zeta^2 - 4\theta)\frac{d^2y}{d\zeta^2} + 2\zeta\frac{dy}{d\zeta} + \left(\zeta^2 - \lambda - 4\theta - \frac{4\theta\mu^2}{\zeta^2 - 4\theta}\right)y = 0,$$

在(5)中，如 $\theta = 0$，則解可用 Bessel 函数表示．特别是，如(5)中的 $\theta = 0$，則这一方程有下列四个解：

(6) $$\psi_\nu^{(1)}(\zeta) = \left(\frac{\pi}{2\zeta}\right)^{1/2} J_{\nu+1/2}(\zeta), \quad \psi_\nu^{(2)}(\zeta) = \left(\frac{\pi}{2\zeta}\right)^{1/2} Y_{\nu+1/2}(\zeta)$$

$$\psi_\nu^{(3)}(\zeta) = \left(\frac{\pi}{2\zeta}\right)^{1/2} H_{\nu+1/2}^{(1)}(\zeta), \quad \psi_\nu^{(4)}(\zeta) = \left(\frac{\pi}{2\zeta}\right)^{1/2} H_{\nu+1/2}^{(2)}(\zeta)$$

其中 $\lambda = \nu(\nu+1) = (\nu+1/2)^2 - 1/4$；記法还可參看 7-2(44)．

这些特殊情形和極限情形的所以重要，不僅是因为它們表示了球体波函数与其他特殊函数之間的关系，而且还由于它們指出了方程(1)的解在奇点附近的性态，告訴我們怎样选擇(1)的特解，以及將这些解怎样展为 Legendre 或 Bessel 函数級数．关于方程(1)与合流超比函数及抛物柱函数的微分方程之間的关系，可參看 Meixner (1948, 1951), Sips (1949)．

微分方程(1)有三个奇点，$z=1$, -1 及 ∞．$z=\pm 1$ 是正則奇点，在每一点上的指数为 $\pm\frac{1}{2}\mu$．$z=\infty$ 是一不正則奇点，方程(5)告訴我們，方程(1)有二个解在 ∞ 上的性态与 z^ν 乘一單值函数及 $z^{-\nu-1}$ 乘一單值函数相仿．这里出現的指数 ν 称为方程(1)的特征指数；它是 θ, λ, μ 的函数，而且和 Mathieu 方程的特征指数一样，由关系式 $\cos(2\pi\nu) = f(\lambda, \mu^2, \theta)$ 來确定．通常，为了更方便起見，常將 λ 表示为 θ, μ 及 ν 的函数，Meixner 所用的記法为 $\lambda_\nu^\mu(\theta)$．顯然

(7) $\lambda_\nu^\mu(0) = \nu(\nu+1)$, $\lambda_\nu^\mu(\theta) = \lambda_\nu^{-\mu}(\theta) = \lambda_{-\nu-1}^{\pm\mu}(0)$．

关于 λ, μ, ν, θ 之間函数关系的討論見 Schmid (1948, 1949), Schäfke (1950), Meixner (1951)．

我們將設(1)式中的 $\lambda=\lambda_\nu^\mu(\theta)$，并將方程的解用 θ,μ,ν 表示．

第一組解將以 Bessel 函数級数表示．方程(5)表明有如下形式的展开式：

$$S_\nu^{\mu(j)}(z,\theta)=(1-z^{-2})^{-\frac{1}{2}\mu}s_\nu^\mu(\theta)\sum_{r=-\infty}^{\infty}a_{\nu,r}^\mu(\theta)\psi_{\nu+2r}^{(j)}(2\theta^{\frac{1}{2}}z) \tag{8}$$

$$j=1,2,3,4.$$

其中 $\psi^{(j)}$ 是(6)式中所定义的函数．为了簡單起見，我們將以 a_r 表示 $a_{\nu,r}^\mu(\theta)$，对其他記法也用同法簡化．將(8)代入(1)可得系数 a_r 的一个遞推关系，系由 Meixner (1951)給出，如下：

$$\begin{aligned}(9)\quad &\frac{(\nu+2r-\mu)(\nu+2r-\mu-1)}{(\nu+2r-\frac{3}{2})(\nu+2r-\frac{1}{2})}\theta a_{r-1}\\ &+\frac{(\nu+2r+\mu+2)(\nu+2r+\mu+1)}{(\nu+2r+\frac{3}{2})(\nu+2r+\frac{5}{2})}\theta a_{r+1}\\ &+\Big[\lambda_\nu^\mu(\theta)-(\nu+2r)(\nu+2r+1)\\ &+\frac{(\nu+2r)(\nu+2r+1)+\mu^2-1}{(\nu+2r-\frac{1}{2})(\nu+2r+\frac{3}{2})}2\theta\Big]a_r=0\end{aligned}$$

$$r=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

今后我們將假設 $\nu+\frac{1}{2}$ 不是一整数(这样所排除的情形似尙沒有充分研究过)．

遞推关系(9)与 16-2(9) 类似．除以一適当的因子后，可導出一無窮行列式，它的等于零就是确定 θ,λ,μ,ν 之間的函数关系的条件．另外，还可以像 16-2(16)，(17)中一样，導出無限連分式 R_n 及 L_n．設 $a_{\nu,0}^\mu(\theta)$的选定可使

$$a_{\nu,0}^\mu(\theta)=a_{-\nu-1,0}^\mu(\theta)=a_{\nu,0}^{-\mu}(\theta) \tag{10}$$

則

$$a_{\nu,r}^\mu(\theta)=a_{-\nu-1,-r}^\mu(\theta)=\frac{(\nu-\mu+1)_{2r}}{(\nu+\mu+1)_{2r}}a_{\nu,r}^{-\mu}(\theta). \tag{11}$$

像在 16-2(21) 中一样，从連分式可得

(12) $\lim\limits_{r\to\infty}\frac{r^2\alpha_r}{\alpha_{r-1}}=\lim\limits_{r\to\infty}\frac{r^2\alpha_r}{\alpha_{r+1}}=\frac{\theta}{4}$,

除非系数序列 $\cdots\alpha_{-2}, \alpha_{-1}, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots$ 在一端(右端或左端)有尽，(12)中的第一或第二極限变成無意义．这种情形只有在 $\nu+\mu$ 或 $\nu-\mu$ 是一整数时發生．从 Bessel 函数的漸近公式可得

(13) $\lim\limits_{r\to\infty}\frac{\psi^{(1)}_{\nu+2r-2}}{r^2\psi^{(1)}_{\nu+2r}}=\lim\limits_{r\to-\infty}\frac{\psi^{(1)}_{\nu+2r}}{r^2\psi^{(1)}_{\nu+2r+2}}=\frac{4}{\theta z^2}$

(14) $\lim\limits_{r\to\infty}\frac{\psi^{(j)}_{\nu+2r}}{r^2\psi^{(j)}_{\nu+2r-2}}=\lim\limits_{r\to-\infty}\frac{\psi^{(j)}_{\nu+2r}}{r^2\psi^{(j)}_{\nu+2r+2}}=\frac{4}{\theta z^2}$, $\qquad j=2, 3, 4.$

从(12)-(14)可知(8)在 $|z|>1$ 时收斂．在这一区域中，$(1-z^{-2})^{-\frac{1}{2}\mu}$ 用二項式展开式定义时可使之成为單值，故在(8)中可令 $-\pi<\arg z\leqslant\pi$. 在(12)式的一个極限不存在的例外情形下，系数的級数在一个方向内有尽，在这一方向内不發生收斂的問題．

H. L. Schmid (1948, 1949)全面地研究了一类包括(9)在内的遞推关系．他的結果确立了 α_r 的存在性和唯一性(除一常数因子外)，并建立了 λ^μ_ν 及 $\alpha^\mu_{\nu,r}$ 展为 θ 冪級数的收斂展开式．

当 $z\to\infty$ 时，$S^{(j)}$ 的漸近性态可用 Meixner (1949)的結果來确定．如 $j=1, 2, \theta>0$, 可令 z 在上半平面或下半平面上 $\to\infty$, 如 $j=3, 4$, 則 z 可依任何方式 $\to\infty$. 于是，根据 7-13(1)-(4)，当 $z\to\infty$ 时

$$\frac{\psi^{(j)}_{\nu+2r}}{\psi^{(j)}_\nu}\to(-1)^r.$$

如令

(15) $s^\mu_\nu(\theta)=\left[\sum\limits_{r=-\infty}^{\infty}(-1)^r\alpha^\mu_{\nu,r}(\theta)\right]^{-1}$

則

(16) $\lim\limits_{z\to\infty}[S^{\mu(j)}_\nu(z,\theta)/\psi^{(j)}_\nu(2\theta^{\frac{1}{2}}z)]=1$,

式中如 $j=1, 2$, 則应設 $\mathrm{Im}(\theta^{\frac{1}{2}}z)\neq0$. 这一关系式也可以寫成

(17) $S^{\mu(j)}_\nu(z,\theta)\sim\psi^{(j)}_\nu(2\theta^{\frac{1}{2}}z)$

$$j=1, 2, 3, 4, \quad z\to\infty, \quad |\arg(\theta^{\frac{1}{2}}z)|<\pi,$$

在这种形式下,正 $\theta^{1/2}z$ 的情形就用不到排除. 当 $j=3, 4$ 时, $\arg(\theta^{1/2}z)$ 的范圍可像 7-13(1), (2) 中一样,分别拓展至 $(-\pi, 2\pi)$ $(-2\pi, \pi)$. 在我們的整个討論中,將假設 s_ν^μ 以(15)式确定.

从 (6) 可知, $\psi_{\nu+2r}^{\mu(1)}$, 因而也是 $S_\nu^{\mu(1)}$, 具有 z^ν 乘以一个在 ∞ 附近为單値的函数的形式,因此, $S_\nu^{\mu(1)}$ 是一第一类解. $S_\nu^{\mu(2)}$ 可称为第二类解. 从(16), (6) 及 7-13(1), (2) 可知, 当 z 分别在半平面 $\mathrm{Im}\,(\theta^{1/2}z)>0$ 及 $\mathrm{Im}\,(\theta^{1/2}z)<0$ 上 $\to\infty$ 时, $S_\nu^{\mu(3)}$ 及 $S_\nu^{\mu(4)}$ 按指数形式趋于零;因此 $S^{(3,4)}$ 都是第三类解. 除了 $S_\nu^{\mu(j)}$ 之外, 倘有解 $S_\nu^{-\mu(j)}$ 及 $S_{-\nu-1}^{\pm\mu(j)}$, $j=1, 2, 3, 4$. 在这 16 个解之間,有着很多关系,它們或者是 (16), 或者是 (11) 与 Bessel 函数間的恆等关系的推論. 下面列出了其中的几个关系,式中都把 z 及 θ 省略不寫.

$$S_\nu^{\mu(j)}=S_\nu^{-\mu(j)} \tag{18}$$

$$S_\nu^{\mu(3)}=S_\nu^{\mu(1)}+iS_\nu^{\mu(2)}=e^{-i\pi(\nu+1/2)}S_{-\nu-1}^{\mu(3)} \tag{19}$$

$$S_\nu^{\mu(4)}=S_\nu^{\mu(1)}-iS_\nu^{\mu(2)}=e^{i\pi(\nu+1/2)}S_{-\nu-1}^{\mu(4)}$$

$$S_\nu^{\mu(2)}=-(\cos\nu\pi)^{-1}[S_\nu^{\mu(1)}\sin(\nu\pi)+S_{-\nu-1}^{\mu(1)}] \tag{20}$$

$$S_\nu^{\mu(3)}=[i\cos(\nu\pi)]^{-1}[S_{-\nu-1}^{\mu(1)}-S_\nu^{\mu(1)}e^{-i\pi(\nu+1/2)}]$$

$$S_\nu^{\mu(4)}=[i\cos(\nu\pi)]^{-1}[S_\nu^{\mu(1)}e^{i\pi(\nu+1/2)}-S_{-\nu-1}^{\mu(1)}]$$

上面的(18)式系从(17)導出,因为在所張的角 $>\pi$ 的扇形上,漸近表示式可唯一地确定(1)的一个解. (19)及(20)从(6), (8), (11), (15)及 7-2(4), (5), (6), (9)導出. Meixner (1951)給出了这些关系式以及另外一些关系式,特别是 $\arg(\theta^{1/2}z)$ 的値拓廣至区間 $(-\pi, \pi)$ 以外的解析开拓公式, 及解 $S_\nu^{\mu(j)}$ 的 Wronski 行列式公式. 由于 $\nu+\frac{1}{2}$, 根据假設,不是整数,故知上述四个解中的任何二个都是綫性無关的,正和 Bessel 函数的情形一样.

上面討論的解都是用級数表示的,这种級数在 $|z|>1$ 时收斂,在 z 很大时特别有用. 現在我們來討論在 ±1 附近以及在区間 $(-1, 1)$ 上有用的解, 并討論在單位圓內部收斂的展开式. Meixner 將这种解記为

(21) $\mathrm{Ps}_\nu^\mu(z,\theta)=\sum_{r=-\infty}^{\infty}(-1)^r\alpha_{\nu,r}^\mu(\theta)\mathrm{P}_{\nu+2r}^\mu(z)$

$$\mathrm{Qs}_\nu^\mu(z,\theta)=\sum_{r=-\infty}^{\infty}(-1)^r\alpha_{\nu,r}^\mu(\theta)\mathrm{Q}_{\nu+2r}^\mu(z)$$

(22) $\mathbf{Ps}_\nu^\mu(x,\theta)=\sum_{r=-\infty}^{\infty}(-1)^r\alpha_{\nu,r}^\mu(\theta)\mathbf{P}_{\nu+2r}^\mu(x)$

$$\mathbf{Qs}_\nu^\mu(x,\theta)=\sum_{r=-\infty}^{\infty}(-1)^r\alpha_{\nu,r}^\mu(\theta)\mathbf{Q}_{\nu+2r}^\mu(x).$$

此处 P, Q 是剖割平面上的 Legendre 函数，定义見 3–2 節，**P**, **Q** 为剖割上的 Legendre 函数，定义見 3-4 節. 因此，在(21)式中，z 在沿实軸由 $-\infty$ 至 1 剖割的复数平面上，故在 (21) 中，可取 $|\arg(z\pm1)|<\pi$；在(22)式中，x 在剖割上，$-1<x<1$，不过，这种解也可以解析开拓至沿实軸由 $-\infty$ 至 -1 及由 1 至 ∞ 剖割的复数平面。

將(21)及(22)式代入(1)，可導出遞推关系(9)，因此 α_r 就是前面所述的同样系数. 今后我們將設

(23) $\alpha_{\nu,0}^\mu(0)=1$

同时，(10)及(11)的关系也成立，因此

(24) $\mathrm{Ps}_\nu^\mu(z,0)=\mathrm{P}_\nu^\mu(z)$, $\mathrm{Qs}_\nu^\mu(z,0)=\mathrm{Q}_\nu^\mu(z)$

$$\mathbf{Ps}_\nu^\mu(x,0)=\mathbf{P}_\nu^\mu(x),\ \mathbf{Qs}_\nu^\mu(x,0)=\mathbf{Q}_\nu^\mu(x)$$

从(12)及 3–9 1 節可知，(21)及(22)处处收斂，可能的例外为点 ±1 及 ∞. 从 3–2 (3), 3–6(2) 可知，如果 $\mu\neq0,1,2,\cdots$，则 Ps 等于 $(z-1)^{-\frac{1}{2}\mu}$ 乘一在 $z=1$ 附近單值的函数；如 $\mu-m=0,1,2,\cdots$，則 Ps 等于 $(z-1)^{\frac{1}{2}m}$ 乘一在 $z=1$ 附近單值的函数. 从 3–2(5) 可知，只要 $\mu+\nu$ 不为負整数，Qs 等于 $z^{-\nu-1}$ 乘一在 $z=\infty$ 附近單值的函数. 因此，Qs 是一第一类解.

在 16 个解 $\mathrm{Ps}_\nu^{\pm\mu}$, $\mathrm{Qs}_\nu^{\pm\mu}$, $\mathrm{Ps}_{-\nu-1}^{\pm\mu}$, $\mathrm{Qs}_{-\nu-1}^{\pm\mu}$, $\mathbf{Ps}_\nu^{\pm\mu}$, $\mathbf{Qs}_\nu^{\pm\mu}$, $\mathbf{Ps}_{-\nu-1}^{\pm\mu}$, $\mathbf{Qs}_{-\nu-1}^{\pm\mu}$ 之間有着很多关系. 这些关系可以从 3–3–1 及 3–4 節中 Legendre 函数的类似关系中推出，而且与之相似. 例子如下：

(25) $\mathrm{Ps}_\nu^\mu=\mathrm{Ps}_{-\nu-1}^\mu$, $\mathbf{Ps}_\nu^\mu=\mathbf{Ps}_{-\nu-1}^\mu$

(26) $e^{i\mu\pi}\Gamma(\nu+\mu+1)\mathrm{Qs}_\nu^{-\mu}=e^{-i\mu\pi}\Gamma(\nu-\mu+1)\mathrm{Qs}_\nu^\mu$

(27) $\mathbf{Ps}_\nu^\mu(-x)=\cos[(\mu+\nu)\pi]\mathbf{Ps}_\nu^\mu(x)$

$\qquad -(2/\pi)\sin[(\mu+\nu)\pi]\mathbf{Qs}_\nu^\mu(x)$.

这些关系分别从 3–3(1), 3–4(7), 3–3(2), 3–4(14)及(11)式導出. 关于这些解的詳細的表, 及 Wronski 式表見 Meixner (1951).

最后, 我們來說明用 Bessel 函数級数表示的解与用 Legendre 函数級数表示的解之間的关系. $S_\nu^{\mu(1)}$ 及 $\mathrm{Qs}_{-\nu-1}^\mu$ 都是第一类解, 都屬于 ∞ 上的指数 ν, 因此必互为常数倍数. Meixner (1951) 命

(28) $S_\nu^{\mu(1)}(z,\theta)=\pi^{-1}\sin[(\nu-\mu)\pi]e^{-(\nu+\mu+1)\pi i}K_\nu^\mu(\theta)\mathrm{Qs}_{-\nu-1}^\mu(z,\theta)$

并建立了 $K_\nu^\mu(\theta)$ 所滿足的許多恆等关系; 这些关系可从 $S_\nu^{\mu(1)}$ 及 Qs_ν^μ 所滿足的恆等关系中導出. 要求 K_ν^μ 的顯式, 注意, 从 (8), (6), 7–5(2)有

$$z^{-\nu}(1-z^{-2})^{\frac{1}{2}\mu}S_\nu^{\mu(1)}(z,\theta)$$

$$=\tfrac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}}s_\nu^\mu(\theta)\sum_{r=-\infty}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s a_{\nu,r}^\mu(\theta)\frac{\theta^{\frac{1}{2}\nu+r+s}z^{2r+2s}}{s!\,\Gamma(\nu+2r+s+\frac{3}{2})},$$

而从(21)及 3–2(41) 有

$$z^{-\nu}(1-z^{-2})^{\frac{1}{2}\mu}e^{-i\mu\pi}\mathrm{Qs}_{-\nu-1}^\mu(z,\theta)$$

$$=\pi^{\frac{1}{2}}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^r a_{-\nu-1,r}^\mu(\theta)2^{\nu-2r-2t}z^{-2r-2t}$$

$$\times\frac{\Gamma(\mu-\nu+2r+2t)}{t!\,\Gamma(\frac{1}{2}+2r+t-\nu)}$$

將(28)的二边都乘以 $z^{-\nu}(1-z^{-2})^{\frac{1}{2}\mu}$, 展开为 Laurent 級数, 而后比較 z^{2k} 的系数, 經簡化后卽得

(29) $$K_\nu^\mu(\theta)=\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{4}\theta)^{\frac{1}{2}\nu+k}\Gamma(1+\nu-\mu+2k)e^{(\nu+k)\pi i}s_\nu^\mu(\theta)$$

$$\times\frac{\displaystyle\sum_{r=-\infty}^{k}\frac{(-1)^r a_{\nu,r}^\mu(\theta)}{(k-r)!\,\Gamma(\nu+k+r+\frac{3}{2})}}{\displaystyle\sum_{r=k}^{\infty}\frac{(-1)^r a_{\nu,r}^\mu(\theta)}{(r-k)!\,\Gamma(\frac{1}{2}-\nu-k-r)}}.$$

因为所有的 $S^{(j)}$ 都可以根据(20)式用 $S^{(1)}$ 來表示，Ps 都可以根据 3–3(8) 用 Qs 來表示，故知应用(28)式就足以將任一 Bessel 函数級数用 Legendre 函数級数來表示，而且也可將任一 Legendre 函数級数用 Bessel 函数級数來表示．所有这些关系在 μ 与 ν 都是整数时得到很大的簡化，見 16–11 節．

16–10.　其他展开式，近似式，積分关系

幂級数展开式

Fisher (1937) 及另外几位作者提出了一些展为 z 或 z^2-1 的幂級数展开式，这种展开式無論在分析工作上或数值計算上似尙不十分重要．

展为 Bessel 函数積的級数展开式除了球体波函数的情形之外，所知似尙不多，見 16–11 節．

Meixner (1950) 曾給出了 16–9(1) 的解的積的展开式，展为 Bessel 函数及 Legendre 函数之積的級数．他的展开式的根据如下．我們引用一种与 16–1–2 節所用的略有不同的記法，設 ξ, η, ϕ 为球体坐标，r, χ, ϕ 为球極坐标，其極在迴轉軸上．它們与笛卡尔坐标的关系为

$$
\begin{aligned}
(1)\qquad x&=c\left[(\xi^2-1)(1-\eta^2)\right]^{1/2}\cos\phi=r\sin\chi\cos\phi\\
y&=c\left[(\xi^2-1)(1-\eta^2)\right]^{1/2}\sin\phi=r\sin\chi\sin\phi\\
z&=c\,\xi\eta=r\cos\chi+c\alpha
\end{aligned}
$$

并令 $4\theta=\kappa^2c^2$，从 16–1–2 節可知

$$
\mathrm{S}_\nu^{\mu(j)}(\xi,\theta)\mathrm{Ps}_\nu^\mu(\eta,\theta)e^{\pm i\mu\phi},\quad \mathrm{S}_\nu^{\mu(j)}(\xi,\theta)\mathrm{Qs}_\nu^\mu(\eta,\theta)e^{\pm i\mu\phi}
$$

是方程 $\Delta W+\kappa^2W=0$ 的解，而

$$
\psi_\lambda^{(j)}(\kappa r)P_\lambda^\mu(\cos\chi)e^{\pm i\mu\phi},\quad \psi_\lambda^{(j)}(\kappa r)Q_\lambda^\mu(\cos\chi)e^{\pm i\mu\phi}
$$

也是該方程的解．研究这些解在 $\xi\to\infty$ 因而 $r\to\infty$ 时的性态以及在 $\eta\to\pm1$ 因而 $\chi\to0,\pi$ 时的性态就可得如下形式的展开式：

(2) $$S_\nu^{\mu(j)}(\xi,\theta)\mathrm{Ps}_\nu^\mu(\eta,\theta)=\sum_{t=-\infty}^{\infty}b_{\nu,t}^\mu(\theta,\alpha)\psi_{\nu+t}^{(j)}(\kappa r)\mathrm{P}_{\nu+t}^\mu(\cos\chi)$$

$$S_\nu^{\mu(j)}(\xi,\theta)\mathrm{Qs}_\nu^\mu(\eta,\theta)=\sum_{t=-\infty}^{\infty}b_{\nu,t}^\mu(\theta,\alpha)\psi_{\nu+t}^{(j)}(\kappa r)\mathrm{Q}_{\nu+t}^\mu(\cos\chi)$$

其中

(3) $$\kappa r=2\theta^{1/2}(\xi^2+\eta^2+\alpha^2-2\alpha\xi\eta-1)^{1/2}$$

$$\cos\chi=(\xi^2+\eta^2+\alpha^2-2\alpha\xi\eta-1)^{-1/2}(\xi\eta-\alpha).$$

Meixner 証明 b_t 滿足一五項的遞推关系（如 $\alpha=\pm1$ 或 $\alpha=0$，則簡化为三項遞推关系），証明了这一遞推关系的解的存在性以及(2)在適当区域中的收斂性，并給出了 b_t 的一个顯表示式，用 16-9(9)的 a_r 及某一其他系数 $\delta_{\nu;t}^{\mu;r}$ 來表示，系数 $\delta_{\nu;t}^{\mu;r}$ 滿足一較簡單的遞推关系．他研究了 $\mu,\nu,\mu\pm\nu$ 的整数值情形，并証明 16-9(1)的解的所有重要展开式都可以借指定(2)中的参数值來求得．例如，在(2)的第一展开式中，如 $\alpha=0$, $\eta\to1$，則得 16-9(8)；又如 $\alpha=0$, $\xi\to\infty$，則得 16-9(21)．

在(2)式中，如令 $\alpha=\pm1,\xi\to\infty$ 或 $\eta\to1$，則得 16-9(1) 的解的新展开式．这些展开式以及它們的收斂区域如下：

(4) $$\mathrm{Ps}_\nu^\mu(z,\theta)=\exp(\pm2\theta^{1/2}zi)\sum_{t=-\infty}^{\infty}i^{\pm t}b_{\nu,t}^\mu(\theta,1)\mathrm{P}_{\nu+t}^\mu(z)$$

$$\mathrm{Qs}_\nu^\mu(z,\theta)=\exp(\pm2\theta^{1/2}zi)\sum_{t=-\infty}^{\infty}i^{\pm t}b_{\nu,t}^\mu(\theta,1)\mathrm{Q}_{\nu+t}^\mu(z)$$

$$z\neq1,\ -1,\ \infty.$$

(5) $$S_\nu^{\mu(j)}(z,\theta)=\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac12\mu}s_\nu^\mu(\theta)\times\sum_{t=-\infty}^{\infty}b_{\nu,t}^\mu(\theta,1)\psi_{\nu+t}^{(j)}[2\theta^{1/2}(z-1)]$$

$$|z-1|>2,\ j=1,2,3,4.$$

$$S_\nu^{\mu(j)}(z,\theta)=\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac12\mu}s_\nu^\mu(\theta)\times\sum_{t=-\infty}^{\infty}b_{\nu,t}^\mu(\theta,-1)\psi_{\nu+t}^{(j)}[2\theta^{1/2}(z+1)]$$

$$|z+1|>2,\ j=1,2,3,4.$$

所有这些展开式中的系数都满足三項遞推关系，在某些区域中，这些展开式較上節中的更为有用．要求 $\mathbf{Ps}_\nu^\mu(x,\theta)$，$\mathbf{Qs}_\nu^\mu(x,\theta)$ 的展开式，在(4)中可以 $\mathbf{P}_{\nu+t}^\mu(x)$、$\mathbf{Q}_{\nu+t}^\mu(x)$ 代 $\mathrm{P}_{\nu+t}^\mu(z)$，$\mathrm{Q}_{\nu+t}^\mu(z)$．

Meixner 在(2)式中令 $\xi\to\infty$ 或 $\eta\to 1$ 而不指定 α，从而得出了更一般的展开式．所得展开式中包含有一任意参数；給这一参数以特殊值，則展开式轉化为 16–9(8) 及 16–9(22)，或 (4) 及 (5)．

在(2)式中，如令 $\alpha=\eta=0$，郎得 $\mathrm{S}_\nu^{\mu(j)}(z,\theta)$ 的 Bessel 函数級数展开式，此处的 Bessel 函数以 $2\theta^{1/2}(z^2-1)^{1/2}$ 作为自变数．这种展开式系由 Fisher (1937)，Meixner (1944)等提出．

$|\theta|$ 很小时的近似式

在 16–9(29) 中令 $k=0$，从 16–9(7)，(9)，(24)，(28) (29)可得

$$\lambda_\nu^\mu(0)=\nu(\nu+1),\ \mathrm{Ps}_\nu^\mu(z,\theta)=\mathrm{P}_\nu^\mu(z),\ \mathrm{Qs}_\nu^\mu(z,0)=\mathrm{Q}_\nu^\mu(z) \tag{6}$$

$$\mathbf{Ps}_\nu^\mu(x,0)=\mathbf{P}_\nu^\mu(x),\ \mathbf{Qs}_\nu^\mu(x,0)=\mathbf{Q}_\nu^\mu(x)$$

$$\alpha_{\nu,0}^\mu(0)=s_\nu^\mu(0)=1,\ \alpha_{\nu,r}^\mu(0)=0, \qquad r=\pm1,\ \pm2,\cdots$$

$$\lim_{\theta\to0}\theta^{-1/2\nu}K_\nu^\mu(\theta)=\frac{e^{\nu\pi i}\Gamma(1+\nu-\mu)\Gamma(\tfrac12-\nu)}{2^{\nu+1}\Gamma(\nu+\tfrac32)}$$

$$\lim_{\theta\to0}\theta^{-1/2\nu}\mathrm{S}_\nu^{\mu(1)}(z,\theta)=-\frac{2^{-\nu-1}\Gamma(\tfrac12-\nu)}{\Gamma(\mu-\nu)\Gamma(\nu+\tfrac32)}e^{-\mu\pi i}\mathrm{Q}_{-\nu-1}^\mu(z)$$

从最后一式及 16–9(20) 就很容易計算

$$\lim_{\theta\to0}\theta^{-1/2\nu}s_\nu^{\mu(j)}(z,\theta), \qquad j=2,3,4.$$

关于 $\lambda_\nu^\mu(\theta)$ 及 $\alpha_{\nu,r}(\theta)$ 展为 θ 冪級数的展开式見 Meixner (1944, §6–3)．

$|z|$ 很大时的漸近式

从 16–9(17)，16–9(6) 及 7–16(1)，(2)，有

$$S_\nu^{\mu(3)}(z,\theta)=\tfrac12\theta^{-1/2}z^{-1}e^{i(2\theta^{1/2}z-1/2\nu\pi-1/2\pi)}[1+O(|z|^{-1})] \tag{7}$$

$$z\to\infty,\ -\pi<\arg(\theta^{1/2}z)<2\pi.$$

(8) $S_\nu^{\mu(4)}(z,\theta)=\frac{1}{2}\theta^{-\frac{1}{4}}z^{-1}e^{-i(2\theta^{\frac{1}{2}}z-\frac{1}{2}\nu\pi-\frac{1}{2}\pi)}[1+O(|z|^{-1})]$

$$z\to\infty,\ -2\pi<\arg(\theta^{\frac{1}{2}}z)<\pi.$$

$S_\nu^{\mu(1)}$, $S_\nu^{\mu(2)}$ 的漸近式可借 16-9(19) 導出. Meixner (1951) 會求得了几个 $z-\alpha$ 降冪的漸近展开式,其中 α 是任意的,并給出了他的展开式的系数所滿足的若干四項遞推关系.

Qs 的漸近式可从 16-9(28) 求得, Ps 可表示为 Qs 的組合,見 3-3(3).

$z=1$ 附近的性态

如果 μ 不是一正整数,則从 16-9(21) 及 3-2(14) 得

(9) $$\mathrm{Ps}_\nu^\mu(z,\theta)=\frac{2^{\frac{1}{2}\mu}}{\Gamma(1-\mu)}(z-1)^{-\frac{1}{2}\mu}\times\sum_{r=-\infty}^{\infty}(-1)^r a_{\nu,r}^\mu(\theta)[1+O(|z-1|)]$$

$$=\frac{(\frac{1}{2}z-\frac{1}{2})^{-\frac{1}{2}\mu}}{\Gamma(1-\mu)s_\nu^\mu(\theta)}[1+O(|z-1|)]\qquad z\to1$$

同理得

(10) $$\mathrm{Ps}_\nu^\mu(x,\theta)=\frac{(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x)^{-\frac{1}{2}\mu}}{\Gamma(1-\mu)s_\nu^\mu(\theta)}[1+O(1-x)]\qquad x\to1-$$

Qs 的性态可从 (9) 式導得, $S_\nu^{\mu(j)}$ 的性态可借 16-9(28) 及 16-9(20) 導得

积分关系式

为了求得 16-9(1) 的解之間的积分关系式,应当注意,这一方程是波动方程 $\Delta W+\kappa^2W=0$ 在 (1) 式的坐标系 ξ,η,ϕ 中經分离变量后所產生. 設 $N(\xi,\eta)e^{i\mu\phi}$ 是 $\Delta W+\kappa^2W=0$ 的一个解,并設 $f(z)$ 是 16-9(1) 的一个解. 应用 16-3 節中的类似运算,可知

(11) $$g(\xi)=\int_a^b N(\xi,\eta)f(\eta)d\eta$$

是 16-9(1) 以 $\xi=z$ 时的一个解,只要

(12) $$\left[(1-\eta^2)\left(\frac{\partial N}{\partial\eta}f-N\frac{df}{d\eta}\right)\right]_a^b=0.$$

置 $f(\eta)=\mathrm{Ps}_\nu^{-\mu}(z,\theta)$，且

(13)　$N(\xi,\eta)=(\xi^2-1)^{\frac{1}{2}\mu}(\eta^2-1)^{\frac{1}{2}\mu}\exp(2\theta^{\frac{1}{2}}\xi\eta i)$

从(9)及 Ps 的漸近性态可知，如果令 $a=0$, $b=i\infty$, $\mathrm{Re}(\theta^{\frac{1}{2}}\xi)>|\mathrm{Re}\,\theta^{\frac{1}{2}}|$，則(12)式將得到滿足．在这种情况下

$$g(\xi)=(\xi^2-1)^{\frac{1}{2}\mu}\int_1^{i\infty}(\eta^2-1)^{\frac{1}{2}\mu}\mathrm{Ps}_\nu^{-\mu}(\eta,\theta)\exp(2\theta^{\frac{1}{2}}\xi\eta i)\,d\eta$$

是 16-9(1) 以 $\xi=z$ 时的一个解．不僅如此，从(9)及 Laplace 積分理論可知，在 $\mathrm{Re}(\theta^{\frac{1}{2}}\xi)>|\mathrm{Re}\,\theta^{\frac{1}{2}}|$ 中，当 $\xi\to\infty$ 时，$g(\xi)$ 漸近地为

$$2^{\frac{1}{2}\mu}\xi^\mu\int_1^{i\infty}\frac{(\frac{1}{2}\eta-\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}\mu}}{\Gamma(1+\mu)s_\nu^{-\mu}(\theta)}(\eta-1)^{\frac{1}{2}\mu}\exp(2\theta^{\frac{1}{2}}\xi\eta i)\,d\eta$$

$$=\frac{\exp(2\theta^{\frac{1}{2}}\xi i+\frac{1}{2}\mu\pi i+\frac{1}{2}\pi i)}{(2\theta^{\frac{1}{2}})^{\mu+1}\xi s_\nu^{-\mu}(\theta)}$$

因此，从(7)得

$$g(\xi)=\frac{-e^{\frac{1}{2}(\mu+\nu)\pi i}}{(2\theta^{\frac{1}{2}})^\mu s_\nu^{-\mu}(\theta)}\,\mathrm{S}_\nu^{\mu(3)}(\xi,\theta).$$

这样就得二積分关系式中的第一个

(14)　$$\mathrm{S}_\nu^{\mu(3)}(\xi,\theta)=-e^{-\frac{1}{2}(\mu+\nu)\pi i}2^\mu\theta^{\frac{1}{2}\mu}s_\nu^{-\mu}(\theta)(\xi^2-1)^{\frac{1}{2}\mu}\times\int_1^{i\infty}(\eta^2-1)^{\frac{1}{2}\mu}\mathrm{Ps}_\nu^{-\mu}(\eta,\theta)\exp(2\theta^{\frac{1}{2}}\xi\eta i)\,d\eta$$

$$\mathrm{Re}(\theta^{\frac{1}{2}}\xi)>|\mathrm{Re}\,\theta^{\frac{1}{2}}|$$

同理可得

(15)　$$\mathrm{S}_\nu^{\mu(4)}(\xi,\theta)=-e^{\frac{1}{2}(\mu+\nu)\pi i}2^\mu\theta^{\frac{1}{2}\mu}s_\nu^{-\mu}(\theta)(\xi^2-1)^{\frac{1}{2}\mu}\times\int_1^{-i\infty}(\eta^2-1)^{\frac{1}{2}\mu}\mathrm{Ps}_\nu^{-\mu}(\eta,\theta)\exp(-2\theta^{\frac{1}{2}}\xi\eta i)\,d\eta$$

$$\mathrm{Re}(\theta^{\frac{1}{2}}\xi)>|\mathrm{Re}\,\theta^{\frac{1}{2}}|$$

16-11．球体波函数

在長球面坐标或扁球面坐标(見 16-1-2 及 16-1-3 節)中波动方程的解的应用上，16-9(1) 中的 $\mu=m$ 是一整数．而且，ν 及 λ

的值中，只有那些能使 16–9(1) 具有一个在区間 $(-1, 1)$ 上有界的解的值才較重要．我們可令 $m=0, 1, 2, \cdots$，不加限制．从 3–9–2 節的表上可以看出，在 $z=1$ 上保持有界的 16–9(1) 的唯一解是 $\mathrm{Ps}_\nu^m(x, \theta)$（或其常数倍数）．从 16–9(22) 及 3–9(13)，(15) 可知这一解在 $z=-1$ 上無界，除非 ν 也是一整数．因此，今后我們將只限于討論如下的微分方程

$$(1)\qquad (1-z^2)\frac{d^2y}{dz^2}-2z\frac{dy}{dz}+[\lambda_n^m(\theta)+4\theta(1-z^2)$$

$$-m^2(1-z^2)^{-1}]y=0,$$

其中 m 及 n 都是整数，θ 为实数．根据 16–9(7)，可令 $m, n=0, 1, 2, \cdots$，且 $n\geqslant m$.

早期著作中的極大部分，以及很多的近期著作都着重研究 μ, ν 为整数的情形，方程(1)的解大都称为**球体波函数**，不过有些作者用这一名称称更較一般性的方程 16–9(1) 的解．$\lambda_n^m(\theta)$，$m, n=0, 1, 2, \cdots$ 称为 λ **的特征值**，有界的解 $\mathrm{Ps}_n^m(x, \theta)$ 是对应的**特征函数**，称为**第一类球体波函数**．球体波函数方面有很多文献，一直到 1932 年为止的文献目錄及結果的总結見 Strutt (1932)，最近的參考文献見 Bouwkamp (1947) 及 Meixner (1951)；后一著作中还有各种結果的很好摘要．最近一些作品列于本章之末，作者为 Abramowitz, Bouwkamp, Eberlein, Hanson, Leitner 及 Spence, Meixner, Sips, Spence, Stratton et al．数值表見 Stratton et al. (1941), Bouwkamp (1941, 1947), Meixner (1944), Leitner 及 Spence (1950)．应当注意，現在还沒有一致的記法，所以在应用上述著作中的結果时必須謹愼．

对于 θ 的適度数値，$\lambda_n^m(\theta)$ 的数值計算可以 16–9 節中的無窮連分式为基礎．这一方法的方便之处就是在計算过程中可得比 a_r/a_0．关于計算工作的說明見 Bouwkamp (1941, 1947) 及 Blanch (1946)．对于 θ 的很小值，特征值和系数可用 θ 的升冪級数來表

示. Bouwkamp (1950) 及 Leitner-Spence (1950) 給出了 $\lambda_n^m(\theta)$ 展为 θ 冪級数的展开式,一直寫到 θ^4. 这一展开式中系数的値由 Bouwkamp (1941, 1947, 1950) 列出,而 Meixner (1944) 則列出了 $\lambda_n^m(\theta)$ 展开式(一直寫到 θ^6) 及 $\alpha_{n,r}^m(\theta)/\alpha_{n,0}^m(\theta)$ 展开式(一直寫到 θ^3) 中的系数値.

下面將設 m, n 都是整数,且 $0\leqslant m\leqslant n$. 在展开式 16-9(22) 的系数所滿足的遞推关系 16-9(9) 中, a_{r+1} 的因子在

$$2r=-m-n-1 \quad 或 \quad 2r=-m-n-2$$

时等于零,根据 $m+n$ 是奇数或偶数而定. 从表示系数的無窮連分式中可得

$$(2)\qquad \alpha_{n,r}^m(\theta)=0 \qquad\qquad 2r\leqslant -m-n-1.$$

从 3-6(3) 及 (6) 可知

$$(3)\qquad \mathrm{P}_{n+2r}^m(x)=0 \qquad\qquad -m-n-1<2r<m-n,$$

因此, (22) 中的第一个展开式变为

$$(4)\qquad \mathrm{Ps}_n^m(x,\theta)=\sum_{2r\geqslant m-n}(-1)^r\alpha_{n,r}^m(\theta)\mathrm{P}_{n+2r}^m(x)$$

或

$$(5)\qquad \mathrm{Ps}_{m+2k}^m(x,\theta)=\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^{k+r}\alpha_{m+2k,r-k}^m(\theta)\mathrm{P}_{m+2r}^m(x)$$

$$\mathrm{Ps}_{m+2k+1}^m(x,\theta)=\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^{k+r}\alpha_{m+2k+1,r-k}^m(\theta)\mathrm{P}_{m+2r+1}^m(x)$$

$$k, m=0, 1, 2, \cdots$$

系数滿足 16-9(9), 以

$$\mu=m,\quad \nu=n,\qquad 且\quad a_r=0,\ 2r\leqslant -m-n-1.$$

現在將 (4) 正規化, 因此

$$(6)\qquad \int_{-1}^{1}[\mathrm{Ps}_n^m(x,\theta)]^2\,dx=\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\,\frac{(n+m)!}{(n-m)!}$$

根据 3-12(19) 及 (21) 可知,这就相当于規格化系数,使

$$(7)\qquad \sum_{2r\geqslant m-n}\frac{1}{n+2r+\frac{1}{2}}\,\frac{(n+2r+m)!}{(n+2r-m)!}[\alpha_{n,r}^m(\theta)]^2=\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\,\frac{(n+m)!}{(n-m)!},$$

并用

(8) $\alpha_{n,0}^{m}(\theta)>0$

來完成規格化.

由于 16-10(6)，这一規格化与 16-9(23)一致. 級数

(9) $$\mathrm{Ps}_n^m(z,\theta)=\sum_{2r\geq m-n}(-1)^r\alpha_{n,r}^m(\theta)\mathrm{P}_{n+2r}^m(z)$$

对于所有有限的 z 都收斂，函数(4)及(9)只差一 $(\pm i)^m$ 的因子.

从 3-3(7)，(10)及 16-9(11)，有

(10) $$\mathrm{Ps}_n^{-m}(z,\theta)=\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\mathrm{Ps}_n^m(z,\theta)$$

$$\mathrm{Ps}_n^m(-z,\theta)=(-1)^n\mathrm{Ps}_n^m(z,\theta)$$

Ps 及 **Ps** 的其他許多关系可从 Legendre 函数的已知公式中求得. 从 3-4(20) 及 3-4(23) 得

(11) $$\mathbf{Ps}_{m+2k}^m(0,\theta)=\frac{(2m+2k)!}{(2k)!}\mathbf{Ps}_{m+2k}^{-m}(0,\theta)$$

$$=2^m\pi^{1/2}\sum_{r=-k}^{\infty}\frac{(-1)^r\alpha_{m+2k,r}^m(\theta)}{(k+r)!\Gamma(\frac{1}{2}-k-m-r)}$$

$$\mathbf{Ps}_{m+2k+1}^{\pm m}(0,\theta)=0 \qquad k,m=0,1,2,\cdots$$

(12) $$\frac{d\mathbf{Ps}_{m+2k}^{\pm m}}{dx}(0,\theta)=0$$

$$\frac{d\mathbf{Ps}_{m+2k+1}^m}{dx}(0,\theta)=\frac{(2m+2k+1)!}{(2k+1)!}\frac{d\mathbf{Ps}_{m+2k+1}^{-m}}{dx}(0,\theta)$$

$$=-2^{m+1}\pi^{1/2}\sum_{r=-k}^{\infty}\frac{(-1)^r\alpha_{m+2k+1,r}^m(\theta)}{(k+r)!\Gamma(-\frac{1}{2}-k-m-r)}$$

$$k,m=0,1,2,\cdots$$

对于解 16-9(8)，在这一情形下有

(13) $$\mathrm{S}_n^{m(j)}(z,\theta)=\mathrm{S}_n^{-m(j)}(z,\theta)$$

$$=(1-z^{-2})^{\frac{1}{2}m}\mathrm{s}_n^{-m}(\theta)\sum_{2r\geq m-n}\alpha_{n,r}^{-m}(\theta)\psi_{n+2r}^{(j)}(2\theta^{1/2}z)$$

$$j=1,2,3,4.$$

当 $\nu-\mu$ 等于零或等于一正整数时 $\mathrm{Qs}_{\nu-1}^{\mu}$ 变为 ∞，但 $\sin[(\nu-\mu)$

$\times\pi]\,Qs^{\mu}_{-\nu-1}$ 趋于一有限的極限. 根据 3-3(3), 当 $\mu\to m$, $\nu\to n$ 时，有

$$\sin[(\nu-\mu)\pi]\,Qs^{\mu}_{-\nu-1}(z,\theta)\to(-1)^{m+n+1}\pi Ps^{m}_{n}(z,\theta)$$

根据 16-9(28) 式，得解(9)与(13)之間的关系为

(14)　$S^{m(1)}_{n}(z,\theta)=K^{m}_{n}(\theta)Ps^{m}_{n}(z,\theta).$

这表明第一类球体波函数可用第一类 Bessel 函数的級数來表示，而这些級数又应对每一个有限非零的 z 收斂. K^{m}_{n} 的表达式要簡單得多，应用 (9) 及 (13)，像在導出 16-9(20) 式时一样，以 $k=(m-n)/2$ 或 $(m-n+1)/2$ (根据 $m-n$ 是偶或奇数而定)，得

(15)　$\Gamma(m+3/2)\,K^{m}_{n}(\theta)\mathbf{Ps}^{m}_{n}(0,\theta)$

$$=\tfrac{1}{2}(-1)^{n}\pi^{1/2}\theta^{1/2m}\,s^{-m}_{n}(\theta)\,a^{m}_{n,(m-n)/2}(\theta),\qquad n-m=\text{偶数}$$

(16)　$\Gamma(m+5/2)K^{m}_{n}(\theta)\dfrac{d\mathbf{Ps}^{m}_{n}(0,\theta)}{dx}$

$$=\tfrac{1}{2}(-1)^{n+1}\pi^{1/2}\theta^{(m+1)/2}s^{-m}_{n}(\theta)\,a^{m}_{n,(m-n+1)/2}(\theta),\ n-m=\text{奇数}$$

从(14)，(15)，(16)可得 $S^{(1)}$ 及 $dS^{(1)}/dz$ 在 $z=0$ 上的值的顯表达式.

第一类球体波函数的其他展开式为

(17)　$Ps^{m}_{n}(z,\theta)=\exp(\pm2\theta^{1/2}zi)\displaystyle\sum_{t=m}^{\infty}i^{\pm t}B^{m}_{n,t}(\theta)P^{m}_{t}(z)$

这一式可从 16-10(4) 導出，还有可从 16-10(2)，(5) 導來的几个展开式，及几个展为 Bessel 函数積的級数展开式都是 Meixner (1949)所提出的.

第一类球体波函数是区間$(-1,1)$上的正交函数. 关于其零点的討論見 Meixner (1944).

$S^{m(2)}_{n}(z,\theta)$ 及 $Qs^{m}_{n}(z,\theta)$ 都是第二类球体波函数. 如果$|z|>1$，則这二函数都滿足函数方程 $f(-z)=(-1)^{n+1}f(z)$，因此它們互为数值倍数. Meixner (1951)給出了它們之間的关系，如下:

(18)　$2\theta^{1/2}K^{-m}_{n}(\theta)S^{m(2)}_{n}(z,\theta)=(-1)^{m+1}s^{m}_{n}(\theta)s^{-m}_{n}(\theta)Qs^{m}_{n}(z,\theta).$

其他的展开式可从 16–10(2), (4), (5) 導出，展为 Bessel 函数之積的級数系由 Meixner (1949) 提出．第三类球体波函数是 $S_n^{m(3,4)}$；这种函数可用 16–9(19), 16–11(14), (18) 表示为 Legendre 函数級数．

現在我們可以構作波动方程在球体坐标系中的適当正規解．首先，設我們所用的是長球面坐标 u, v, ϕ．在 16–1–2 節中已經說明，对一个在球体 $u=u_0$ 内部正則的波函数來說，U 是第一类球体波函数，而 V 是第一类修正球体波函数．因此，内長球体波函数应有如下形式：

$$(19)\quad S_n^{m(1)}(\cosh u, \tfrac{1}{4}\kappa^2c^2)\,\mathrm{Ps}_n^m(\cos v, \tfrac{1}{4}\kappa^2c^2)\,e^{\pm im\phi}$$

$$m=0, 1, 2, \cdots, n;\ n=0, 1, 2, \cdots$$

而外長球体波函数則形为

$$(20)\quad S_n^{m(j)}(\cosh u, \tfrac{1}{4}\kappa^2c^2)\,\mathrm{Ps}_n^m(\cos v, \tfrac{1}{4}\kappa^2c^2)\,e^{\pm im\phi}$$

$$j=3, 4;\ m=0, 1, \cdots, n;\ n=0, 1, \cdots$$

式中 $j=3$ 或 4 根据 ∞ 上的漸近性态規定为 $r^{-1}e^{i\kappa r}$ 或 $r^{-1}e^{-i\kappa r}$ 而定．

同样，从 16–1–3 節可得扁球体波函数

$$(21)\quad S_n^{m(j)}(-i\sinh u, \tfrac{1}{4}\kappa^2c^2)\,\mathrm{Ps}_n^m(\cos v, -\tfrac{1}{4}\kappa^2c^2)\,e^{\pm im\phi}$$

$$j=1, 3, 4;\ m=0, 1, \cdots, n;\ n=0, 1, \cdots$$

式中 $j=1$ 是橢球 $u=u_0$ 内部正則的波函数，$j=3, 4$ 是橢球 $u=u_0$ 外部正則的波函数．在(21)式中，$4\theta=-\kappa^2c^2$，应当理解，在 16–10 節的漸近公式中所取的是 $2\theta^{1/2}=i\kappa c$．

給定在一長球面或扁球面 $u=u_0$ 上的任意函数可展为如下形式的級数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(A_n^m\cos m\phi+B_n^m\sin m\phi)\,\mathrm{Ps}_n^m(\cos v, \theta)$$

这一展开式在球面調和函数的相同条件下正确，其系数可用三角函数及球体波函数的正交性質來計算．

16-12. 球体波函数的近似式及漸近形式

±1 附近的性态

球体波函数在 ±1 附近的性态可以用下面的方法來研究，即將 3-9-2 節表中的近似式代入球体波函数展为 Legendre 函数級数的展开式中，而后应用 6-11(2), 16-9(11) 及 16-9(15) 來簡化公式．結果如下：

(1)
$$\mathrm{Ps}_n^m(z,\theta)=[K_n^m(\theta)]^{-1}S_n^{m(1)}(z,\theta)$$
$$=\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\,\frac{(z-1)^{\frac{1}{2}m}}{2^{\frac{1}{2}m}m!\,s_n^{-m}(\theta)}+O(|z-1|^{1+\frac{1}{2}m})$$
$$\mathrm{Ps}_n^m(x,\theta)=\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\,\frac{(-1)^m(1-x)^{\frac{1}{2}m}}{2^{\frac{1}{2}m}m!\,s_n^{-m}(\theta)}+O(|1-x|^{1+\frac{1}{2}m})$$
$$m=0,1,\cdots,n;\ n=0,1,\cdots$$

(2)
$$Qs_n^0(z,\theta)=-2\theta^{\frac{1}{2}}[s_n^0(\theta)]^{-2}K_n^0(\theta)S_n^{0(2)}(z,\theta)$$
$$=-\frac{1}{2}[s_n^0(\theta)]^{-2}\ln\left(\frac{z-1}{2}\right)$$
$$-\sum_{2r\geq -n}(-1)^r\alpha_{n,r}^0(\theta)h_{n+2r}+O(|z-1|)$$
$$Qs_n^m(z,\theta)=(-1)^{m+1}2\theta^{\frac{1}{2}}[s_n^m(\theta)s_n^{-m}(\theta)]^{-1}K_n^{-m}(\theta)s_n^{m(2)}(z,\theta)$$
$$=\frac{(-1)^m(m-1)!\,2^{\frac{1}{2}m-1}}{s_n^m(\theta)\,(z-1)^{\frac{1}{2}m}}+O(|z-1|^{1-\frac{1}{2}m})$$
$$m=1,2,\cdots,n;\ n=1,2,3,\cdots$$

其中

(3)
$$h_0=0,\quad h_k=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}\qquad k=1,2,\cdots$$

至于 Qs, 在(2)中以 $1-x$ 代 $z-1$ 即得．

这些函数在 -1 附近的性态从下列关系中即可得出，即

(4)
$$\mathrm{Ps}_n^m(-z,\theta)=(-1)^n\mathrm{Ps}_n^m(z,\theta),$$
$$Qs_n^m(-z,\theta)=(-1)^{n+1}Qs_n^m(z,\theta)$$
$$\mathrm{Ps}_n^m(-x,\theta)=(-1)^{n-m}\mathrm{Ps}_n^m(x,\theta),$$

$$\mathrm{Qs}_n^m(-x,\theta)=(-1)^{n-m+1}\mathrm{Qs}_n^m(x,\theta)$$

在 ∞ 附近的性态

关于 $\mathrm{S}_n^{m(j)}$，見 16-10(7)，(8) 及 16-9(19)．Ps 及 Qs 可应用公式 16-11(14)，(18)用 $\mathrm{S}_n^{m(j)}$ 來表示．

$|\theta|$很小时的近似式

这时的 λ, Ps, Qs, α_r, s_n^m 見 16-10(6)．从 16-10(6)式还可得

$$(5)\qquad \lim_{\theta\to 0}\theta^{-\frac{1}{2}n}\mathrm{K}_n^m(\theta)=\frac{(n-m)!}{2^n\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{3}{2}\right)_n},$$

$$\lim_{\theta\to 0}\theta^{-\frac{1}{2}n}\mathrm{K}_n^{-m}(\theta)=\frac{(n+m)!}{2^n\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{3}{2}\right)_n},\quad m=0,1,\cdots,n;\ n=0,1,\cdots$$

于是根据 16-11(14)，(18) 有

$$(6)\qquad \lim_{\theta\to 0}\theta^{-\frac{1}{2}n}\mathrm{S}_n^{m(-1)}(z,\theta)=\frac{(n-m)!}{2^n\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{3}{2}\right)_n}\mathrm{P}_n^m(z)$$

$$\lim_{\theta\to 0}\theta^{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}}\mathrm{S}_n^{m(2)}(z,\theta)=\frac{(-1)^{m+1}2^{n+1}}{(n+m)!}\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{3}{2}\right)_n\mathrm{Q}_n^m(z)$$

$$m=0,1,\cdots,n;\ n=0,1,\cdots$$

$|\theta|$很大时的漸近形式

先取 θ 为正的．作代换

$$(7)\qquad y=(1-z^2)^{\frac{1}{2}m}Y,\quad 2\theta^{\frac{1}{4}}z=Z$$

可將 16-11(1) 变换为

$$(8)\qquad \left(1-\frac{Z^2}{2\theta^{\frac{1}{2}}}\right)\frac{d^2Y}{dZ^2}-\frac{m+1}{2\theta^{\frac{1}{2}}}\frac{dY}{dZ}+\left(\varLambda-\frac{Z^2}{4}\right)Y=0$$

其中

$$(9)\qquad \varLambda=\theta^{\frac{1}{2}}+\tfrac{1}{4}\theta^{-\frac{1}{2}}(\lambda_n^m-m-m^2).$$

对于很大的 θ，(8)近似于抛物柱函数的微分方程 8-2(1)，区間 $-1<z<1$ 在 $\theta\to\infty$ 时的極限情形下对应于 $-\infty<Z<\infty$．但，Ps_n^m 是 16-11(1) 的一个有界解，又 $(1-z^2)^{-\frac{1}{2}m}\,\mathrm{Ps}_n^m(z,\theta)$在区間

$-1<z<1$ 上有界．另一方面，从 8-4 節可知 Weber 微分方程在而且只有在 $\Lambda-\frac{1}{2}$ 是一非負整数时才具有一个在 $-\infty<Z<\infty$ 上有界的解．这个整数就等于有界解的零点数；因为 Ps_n^m 恰有 $n-m$ 个零点，故知 Λ 逼近于 $n-m+\frac{1}{2}$，而 Ps_n^m 則近似地等于 $(1-z^2)^{\frac{1}{2}m}D_{n-m}(2\theta^{\frac{1}{4}}z)$ 的一个数值倍数．这样，就得

$$(10)\quad \lambda_n^m(\theta)=-4\theta+2\theta^{\frac{1}{2}}(2n-2m+1)+O(1)\qquad \theta\to\infty$$

$$\mathrm{Ps}_n^m(x,\theta)\sim c_n^m(1-x^2)^{\frac{1}{2}m}D_{n-m}(2\theta^{\frac{1}{4}}x)\qquad \theta\to\infty$$

其中

$$(11)\quad c_n^m=\mathrm{Ps}_n^m(0,\theta)/D_{n-m}(0)\qquad n-m\text{ 偶数}$$

$$c_n^m=\tfrac{1}{2}\theta^{-\frac{1}{4}}\frac{d\,\mathrm{Ps}_n^m}{dx}(0,\theta)\Big/\frac{dD_{n-m}}{dZ}(0)\qquad n-m\text{ 奇数}$$

c_n^m 的顯表达式可从 8-2(4) 及 16-11(11)，(12) 導出．

为了得到更高的精确度，可把(10)换为形式無窮級数：

$$(12)\quad \lambda_n^m(\theta)=-4\theta+2\theta^{\frac{1}{2}}(2n-2m+1)+\sum_{r=0}^{\infty}\theta^{-\frac{1}{2}r}\lambda_{n,r}^m$$

$$\mathrm{Ps}_n^m(x,\theta)=(1-x^2)^{\frac{1}{2}m}\sum_{r=-\infty}^{\infty}c_{n,r}^m D_{n-m+2r}(2\theta^{\frac{1}{4}}x)$$

將(12)式代入 16-11(1)而后比較 θ 同次冪的系数，用这种方法求近似式的是 Meixner (1944, 1947, 1948, 1951)，Eberlein (1948)，Sips (1949)．特别是，Meixner (1951) 給出了 λ_n^m 的展开式，一直寫到項 $\theta^{-5/2}$，并且还說明了几个 $c_{n,r}^m$．这些公式由数值計算証明其有用．

如果 x 有界于零以外，則(10)中的抛物柱函数可以其漸近表示式 8-4(1) 代替．在 $x=0$ 的鄰域中，$\mathrm{Ps}_n^m(x,\theta)$ 的性态比較复雜，因为所有的零点都積聚在这一点周圍．

如 θ 是負数，則所有零点都積聚在点 $x=\pm1$ 的周圍，因此，$\mathrm{Ps}_n^m(x,\theta)$ 在这些点附近的性态比較复雜．为了研究 $x=1$ 附近的性态，可用代換

(13) $y=(1-z^2)^{\frac{1}{2}m}Y,\ 4(-\theta)^{\frac{1}{2}}(1-z)=Z$

將 16–11(1) 变换为

(14) $$Z\left[1-\frac{Z}{8(-\theta)^{\frac{1}{2}}}\right]\frac{d^2Y}{dZ^2}+(m+1)\left[1-\frac{Z}{4(-\theta)^{\frac{1}{2}}}\right]\frac{dY}{dZ}$$
$$+\left\{\Delta-\frac{Z}{4}\left[1-\frac{Z}{8(-\theta)^{\frac{1}{2}}}\right]\right\}Y=0$$

其中

(15) $8\Delta=(-\theta)^{-\frac{1}{2}}(\lambda_n^m-m-m^2)$.

对于大的 $-\theta$, (14)近似地是 6–2(1)型的微分方程,此时

$$a_0=1,\ a_1=0,\ a_2=-\frac{1}{4},\ b_0=0,\ b_1=m+1,\ b_2=\Delta.$$

这一近似方程的通解由 6–2(6)式知为

$$e^{-\frac{1}{2}Z}\mathfrak{Z}\left(\frac{m+1}{2}-\Delta,\ m+1,\ Z\right)$$

此处 $\mathfrak{Z}(a, c, x)$ 是 6–1(2)的通解. 因为 Y 在 $0<z<1$ 上有界,故当 $\theta\to-\infty$ 时,它应在 $0<Z<\infty$ 上有界. 但 $c=m+1$ 的合流超比方程在 $Z=0$ 上有界的唯一解是 $\Phi(a, c, Z)$, 而且从 6–13(2)式可以看出,这一函数在 $Z\to\infty$ 时按指数形式递增, 除非 a 等于零或等于負整数. 因此, $\frac{1}{2}(m+1)-\Delta=-M$, $M=0, 1, 2, \cdots$, 解近似地等于

$$e^{\frac{1}{2}Z}\Phi(-M, m+1, Z)$$

的一个数值倍数,或,根据 6–9(36), 等于下式的数值倍数:

$$\exp[2(-\theta)^{\frac{1}{2}}z]\,L_M^m[4(-\theta)^{\frac{1}{2}}(1-z)].$$

今, M 是这一解在 $0<z<1$ 上的零点数. 由于 $\mathrm{Ps}_n^m(z, \theta)$ 在这一区間上具有 $(n-m)/2$ 或 $(n-m-1)/2$ 个零点(根据 $n-m$ 是偶数或奇数而定), 因此 $n=m+2M$ 或 $n=m+2M+1$, 根据 $n-m$ 是偶数或奇数而定. 此外,根据 $n-m$ 是偶数或奇数, $\mathrm{Ps}_n^m(z, \theta)$ 是 z 的偶函数或奇函数,因此得下列結果:

(16) $\lambda_{m+2k}^m(\theta)=4(-\theta)^{\frac{1}{2}}(m+2k+1)+O(1)\qquad \theta\to\infty$

$$\mathbf{Ps}_{m+2k}^{m}(x,\theta)\sim\tfrac{1}{2}c_{m+2k}^{m}(1-x^{2})^{\frac{1}{2}m}$$
$$\times\{\exp[2(-\theta)^{\frac{1}{2}}x]L_{k}^{m}[4(-\theta)^{\frac{1}{2}}(1-x)]$$
$$+\exp[-2(-\theta)^{\frac{1}{2}}x]L_{k}^{m}[4(-\theta)^{\frac{1}{2}}(1+x)]\},\quad\theta\to-\infty.$$
$$c_{m+2k}^{m}=\mathbf{Ps}_{m+2k}^{m}(0)/L_{k}^{m}[4(-\theta)^{\frac{1}{2}}]$$

$$(17)\quad\lambda_{m+2k+1}^{m}(\theta)=4(-\theta)^{\frac{1}{2}}(m+2k+1)+O(1)\qquad\theta\to\infty$$
$$\mathbf{Ps}_{m+2k+1}^{m}(x,\theta)\sim\tfrac{1}{2}c_{m+2k+1}^{m}(1-x^{2})^{\frac{1}{2}m}$$
$$\times\{\exp[2(-\theta)^{\frac{1}{2}}x]L_{k}^{m}[4(-\theta)^{\frac{1}{2}}(1-x)]$$
$$-\exp[-2(-\theta)^{\frac{1}{2}}x]L_{k}^{m}[4(-\theta)^{\frac{1}{2}}(1+x)]\},\quad\theta\to-\infty.$$

对于較小的 x 值，比較式子的二边卽可得系数 c_n^m.

像在 $\theta\to\infty$ 时的情形一样，將 λ_n^m 展为 $(-\theta)^{\frac{1}{2}}$ 的降冪級数，Ps_n^m 展为 Laguerre 多項式級数(像上面一样与指数函数結合)，代入 16-11(1)而后比較 θ 的同次冪的系数，卽可得較高的精确度，見 Svartholm (1938), Meixner (1944, 1947, 1948, 1951), Sips (1949). 特別是，Meixner (1951)給出了 λ_n^m的展开式，一直寫到 $(-\theta)^{-5/2}$ 項，他还給出了 Laguerre 多項式級数展开式中的一些系数.

如果 x 有界于 ±1 之外，則 (16) 及 (17) 中的 Laguerre 多項式可以下列的首項來代替，卽

$$\frac{(-1)^{k}}{k!}[4(-\theta)^{\frac{1}{2}}(1\mp x)]^{k}.$$

Ps 在 ±1 附近的性态更为复雜，不能用初等函数來說明.

其他漸近形式

$\lambda_n^m(\theta)$ 及 $a_{n,r}^m(\theta)$ 在 $n\to\infty$ 的漸近性态曾由 Meixner (1944) 研究过，他証明用連分式可導出 $2n+1$ 的降冪展开式. 他給出了 λ_n^m 的展开式，一直寫到項 $(2n+1)^{-5}$，以及 a_r/a_0 的展开式，一直寫到項 $(2n+1)^{-2}$.

Abramowitz (1949) 研究过大的 m 的情形，以及大的 m 及 θ 的情形，他所用的方法与上面所說大的 $|\theta|$ 情形中的研究方法相似. 他也用数值計算測驗了他的公式.

16-13. 包含球体波函数的級数与積分

積分关系与積分方程

16-10 節末所建立的一些積分关系对球体波函数仍保持有效. 此外,还有以 $a=-1$, $b=1$ 的几个積分关系,因为 Ps_n^m 在 $(-1,1)$ 上有界,并具有一有界的導数,因此,只要 N 及 $\partial N/\partial\eta$ 有界,則对于 $a=-1$, $b=1$, 16-10(12) 也被满足. 取核 16-10(13) 并考察

(1) $$g(\xi)=(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}m}\int_{-1}^{1}(1-\eta^2)^{\frac{1}{2}m}\,\mathrm{Ps}_n^m(\eta,\theta)\exp(2\theta^{\frac{1}{2}}\eta\xi i)\,d\eta$$

根据 16-10 節的結論,可知这是一个橢球波函数,又因 $g(\xi)$ 在 $-1<\xi<1$ 上有界,所以它是 $\mathrm{Ps}_n^m(\xi,\theta)$ 的数值倍数. 为了确定这里的数值因子,我們來計算

(2) $$g(0)=\int_{-1}^{1}(1-\eta^2)^{\frac{1}{2}m}\,\mathrm{Ps}_n^m(\eta,\theta)\,d\eta$$

$$\frac{dg}{d\xi}(0)=2\theta^{\frac{1}{2}}i\int_{-1}^{1}\eta(1-\eta^2)^{\frac{1}{2}m}\,\mathrm{Ps}_n^m(\eta,\theta)\,d\eta$$

这可代入 16-11(4) 來進行. 令

(3) $$\int_{-1}^{1}(1-\eta^2)^{\frac{1}{2}m}\,\mathrm{P}_{n+2r}^m(\eta)\,d\eta$$

在 $n-m$ 是一奇整数时顯然等于零, 因为此时的被積式是 η 的奇函数;又根据 3-12(25)可知,这一積分在 $n-m$ 是偶数而 $n+2r\neq m$ 时也等于零. 最后,当 $n+2r=m$ 时,根据 3-12(25), 有

(4) $$\int_{-1}^{1}(1-\eta^2)^{\frac{1}{2}m}\,\mathrm{P}_m^m(\eta)\,d\eta=\frac{(-2)^m m!}{m+\frac{1}{2}}.$$

同理

$$\int_{-1}^{1}\eta(1-\eta^2)^{\frac{1}{2}m}\,\mathrm{P}_{n+2r}^m(\eta)\,d\eta$$

等于零,除非 $n+2r=m+1$, 且

(5) $$\int_{-1}^{1}\eta(1-\eta^2)^{\frac{1}{2}m}\,\mathrm{P}_{m+1}^m(\eta)\,d\eta=\frac{(-2)^m m!}{m+\frac{3}{2}}$$

因此

$$(6)\qquad g(0)=(-1)^{k+m}\frac{2^m m!}{m+\frac{1}{2}}\alpha^m_{n,-k}(\theta)\qquad n=m+2k$$

$$g(0)=0\qquad n=m+2k+1$$

$$\frac{dg}{d\xi}(0)=0\qquad n=m+2k$$

$$\frac{dg}{d\xi}(0)=2\theta^{\frac{1}{2}}i(-1)^{k+m}\frac{2^m m!}{m+\frac{3}{2}}\alpha^m_{n,-k}(\theta)\qquad n=m+2k+1$$

应用这些結果及 Ps 的宇称，从(1)可得積分方程

$$(7)\qquad (m+\tfrac{1}{2})\,\mathrm{Ps}^m_n(0,\theta)(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}m}\times\int_0^1(1-\eta^2)^{\frac{1}{2}m}\cos(2\theta^{\frac{1}{2}}\xi\eta)\,\mathrm{Ps}^m_n(\eta,\theta)d\eta$$
$$=(-1)^{k+m}2^{m-1}m!\,\alpha^m_{n,-k}(\theta)\,\mathrm{Ps}^m_n(\xi,\theta),\qquad n=m+2k.$$

$$(8)\qquad (m+\tfrac{3}{2})\frac{d\mathrm{Ps}^m_n}{d\xi}(0,\theta)(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}m}\times\int_0^1(1-\eta^2)^{\frac{1}{2}m}\sin(2\theta^{\frac{1}{2}}\xi\eta)\,\mathrm{Ps}^m_n(\eta,\theta)d\eta$$
$$=(-1)^{k+m}2^m m!\,\theta^{\frac{1}{2}}\alpha^m_{n,-k}(\theta)\,\mathrm{Ps}^m_n(\xi,\theta),\qquad n=m+2k+1.$$

Meixner (1951) 还給出了如下的積分关系：

$$(9)\qquad \int_{-1}^1\exp(2i\theta^{\frac{1}{2}}\sigma\xi\eta)\times J_m\{2[\theta(1-\sigma^2)(1-\eta^2)(\xi^2-1)]^{\frac{1}{2}}\}\,\mathrm{Ps}^m_n(\eta,\theta)d\eta$$
$$=2i^{n-m}S^{m(1)}_n(\xi,\theta)\,\mathrm{Ps}^m_n(\sigma,\theta)$$

$$(10)\qquad s^{-m}_n(\theta)\int_{-1}^1\mathrm{P}^{-m}_m(\cos\chi)\psi^{(j)}_m(\kappa r)\,\mathrm{Ps}^m_n(\eta,\theta)d\eta$$
$$=\frac{(-1)^m\theta^{-\frac{1}{2}m}(n+m)!}{2^{2m-1}m!\,(n-m)!}(\alpha^2-1)^{-\frac{1}{2}m}S^{m(j)}_n(\xi,\theta)S^{m(1)}_n(\alpha,\theta)$$

在(10)式中，κr 与 $\cos\chi$ 的意义同 16-10(3)．如 $j=1$，(10)式对所有的 ξ 都正确，如 $j=2, 3, 4$，則只对充分大的 ξ 正确．这二式可根据下列事实來建立，卽它們的核，作为 ξ 及 η 的函数，满足

16–10 節中 N 的偏微分方程，因此这二積分作为 ξ 的函数來看，都是橢球波函数．在(9)的情形下，这一波函数在 $\xi=\pm1$ 上有界，因此必为 $S_n^{m(1)}(\xi)$ 的倍数．此时的数值因子可以 $(\xi^2-1)^{-\frac{1}{2}m}$ 乘(9)的两边，令 $\xi\to1$ 而后应用(7)，(8)及 16–12(1)來确定．在(10)的情形下，$\xi\to\infty$ 时的漸近性态卽可确定右側的式子．

应用 Legendre 函数的正交性質，卽可从前面几節的一些展开式中導出另外一些積分公式．例如，从 16–11(4)，16–9(11) 及 Legendre 函数的正交性質及規格化公式 3 12(19) 及(21)可導出

$$(11)\quad \int_{-1}^{1}\mathrm{Ps}_n^m(x,\theta)\,\mathrm{P}_l^m(x)\,dx=0,\ \text{如 } l-n \text{ 为負数或奇数},$$

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{Ps}_n^m(x,\theta)\mathrm{P}_l^m(x)\,dx=\frac{(-1)^r a_{n,r}^m(\theta)}{l+\frac{1}{2}}\ \frac{(l+m)!}{(l-m)!}$$

$$=\frac{(-1)^r a_{n,r}^{-m}(\theta)}{l+\frac{1}{2}}\ \frac{(n+m)!}{(n-m)!},\quad \text{如 } l-n=2r,\ r=0,1,2,\cdots$$

其他的積分公式可从 16–10(2) 那样的展开式及其各种特殊情形与極限情形中導出．在(9)及(10)式中，如給 α,σ,ξ 以特殊値，也可以求得几个重要的積分式，見 Meixner (1951).

从已經求得的一些級数及積分式中，可導出許多展为球体波函数級数或球体波函数之積的級数的展开式．(11)式可以看作是 $\mathrm{P}_l^m(x)$ 展为球体波函数級数中确定其 Fourier 系数的公式，因此可得展开式

$$(12)\quad \mathrm{P}_l^m(x)=\sum_{r=0}^{m}(-1)^r\frac{l-2r+\frac{1}{2}}{l+\frac{1}{2}}\,a_{l-2r,r}^{-m}(\theta)\,\mathrm{Ps}_{l-2r}^m(x,\theta)$$

这一式也可以看作是公式 16–11(4) 的反演．同理公式 (7)–(10) 也可以看作是这些積分关系的核展为球体波函数級数时确定其 Fourier 系数的公式，見 Meixner (1951). 將平面波，球面波及柱面波函数展为球体波函数級数的展开式見 Meixner (1944, 1951), Leitner 及 Spance (1950).

椭球波函数

16-14. 拉美波动方程

微分方程

(1) $$\frac{d^2\Lambda}{dz^2}+\{h-l[\mathrm{sn}(z,k)]^2+\omega^2k^2[\mathrm{sn}(z,k)]^4\}\Lambda=0$$

(見16-1-4節)称为 Lamé 波动方程的 Jacobi 形式,有时也称为廣义 Lamé 方程或椭球波函数微分方程. 如 $\omega=0$, 则(1)式轉化为 Lamé 方程 15-1(6). 在这一節中,所有的椭圓函数將都具有同样的模 k, 根据 15-1(6) 可知 $0<k<1$. 15-1-1 節也表明,在椭球波函数中,只出現有 $\mathrm{Im}\, z=0$ 或 $\mathrm{Im}\, z=\mathbf{K}'$ 或 $\mathrm{Re}\, z=\mathbf{K}$ 的那些 z 值,但現在我們將就 z 的任意复数值來研究(1).

作变量变換

(2) $$(\mathrm{sn}\, z)^2=x$$

卽可得 Lamé 波动方程的代数形式,这一变換把(1)变为

(3) $$\frac{d^2\Lambda}{dx^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-k^{-2}}\right)\frac{d\Lambda}{dx}+\frac{hk^{-2}-lk^{-2}x+\omega^2x^2}{4x(x-1)(x-k^{-2})}\Lambda=0.$$

作代換 15-2(2), 卽可得(1)的 Weierstrass 型, 作代換 15-2(4), 则得其三角形式, 且 $\Lambda=f(z)M$, 此处 $f(z)$ 等于 1, $\mathrm{sn}\, z$, $\mathrm{cn}\, z$, $\mathrm{dn}\, z$, $\mathrm{cn}\, z\, \mathrm{dn}\, z$, $\mathrm{sn}\, z\, \mathrm{dn}\, z$, $\mathrm{sn}\, z\, \mathrm{cn}\, z$, 或 $\mathrm{sn}\, z\, \mathrm{cn}\, z\, \mathrm{dn}\, z$, 应用 15-2(8) 尚可得另一代数形式,以及(3)的其他有理变换.

方程(3)具有四个奇点: $x=0, 1, k^{-2}$ 是正則奇点,其每一个的指数是 0 及 $\frac{1}{2}$, 而 $x=\infty$ 則是一不正則奇点. 关于具有不正則奇点的方程的一般理論見 Ince (1927, p 417 ff.). 在任一正則奇点的周圍,有解可展为冪級数,極像 Heun 方程(見15-3節)的情形; 但在不正則奇点的周圍則不存在有这样的收斂展开式. 在这种奇点的附近,有如下的形式展开式:

(4) $$e^{\pm i\omega\xi}\sum_{0}^{\infty}c_n\xi^{-2-n}$$

式中 $\xi=x^{1/2}$, $(x-1)^{1/2}$ 或 $(x-k^2)^{1/2}$ (次正規解, Ince 1927, § 17-53). 虽然这些形式級数是發散的，但当 x 在某些扇形上 $\to\infty$ 时，它們將漸近地表示(3)的解.

方程 (3) 也可以用不同方法考虑为合流型 Fuchs 类的方程. 这里，可以具有 5 个正則奇点的方程为出發点(Ince 1927 § 15·4). 也可以具有 6 个初等奇点 (elementary singularity) 的方程为出發点(Ince 1927, p 502*)

从双周期系数的微分方程的一般理論 (Ince 1927, p 375 ff, Poole 1936, p. 170 ff.) 可知，方程(1)具有一个解

(5) $$u_0(z)=e^{\mu z}\frac{\theta_1\left(\dfrac{z-a}{2K}\right)}{\theta_1\left(\dfrac{z}{2K}\right)}P(z)$$

式中 a 及 μ 都是常数，依賴于 h, k^2, l, ω; $P(z)$ 是一双周期函数，周期为 $2K$, $2iK'$. [在(5)式中，我們应用到 σ 函数与 θ 函数之間的关系式 13-20(1)]. 顯然

(6) $$u_0(-z)=e^{-\mu z}\frac{\theta_1\left(\dfrac{z+a}{2K}\right)}{\theta_1\left(\dfrac{z}{2K}\right)}P(-z)$$

也是方程的一个解，从(5), (6) 及 13-19 節的表 8 可以看出，a 可以确定到它的符号，及 $2K$ 与 $2iK'$ 的整数倍数. a 的一个可能值一經选定以后，μ 就可确定.

一般，$u_0(z)$ 与 $u_0(-z)$ 是綫性無关的，(1)的通解就是(5)及(6)的一个綫性組合. 但当 $u_0(z)=\pm u_0(-z)$ 或

$$e^{2\mu z}\theta_1\left(\frac{z+a}{2K}\right)=\pm\theta_1\left(\frac{z-a}{2K}\right)$$

---

* 原文誤刊为 p 592——譯者

时为唯一例外．令 $z=a$，则从 §13–19 的表 9 可以看出 a/K 是 $\theta_1(v)$ 的一个零点，因此，在这一情形下，$a=mK+nK'i$．令 $z=K$，则从 §13–19 的表 8 可知 $e^{2\mu K}=\pm 1$，因此，在这一情形下，$2K\mu=n'\pi i$，通过一簡略的运算可証 $n=n'$．由此可知，在例外情形下，無論怎样 u_0 总是 z 的偶函数或奇函数，$u_0(z+2K)=\pm u_0(z)$，$u_0(z+2K'i)=\pm u_0(z)$，因此，$2K$ 及 $2K'i$ 是 $u_0(z)$ 的周期或半周期．在这一例外情形下，为了求得(1)的通解，应構作一个第二类(或第三类)的解．

根据 16–1–4 節可知，在橢球波函数情形下 $B(\beta)$ 及 $C(\gamma)$ 的边界条件与橢球調和函数情形中的一样，这就是說(根据 15–1–1 節)，从橢球波函数的观点來看，唯一重要的情形就是方程(1)具有一个解，它是 z 的双周期函数，周期为 $4K$ 及 $4iK'$．这恰正是上段所說的例外情形．双周期解 $u_0(z)$ 称为第一类 Lamé 波函数．这样的一个解存在的条件有二，一是 a 上的条件，另一是 μ 上的条件．給定了 ω [在波动方程的情形下，$\omega=(a^2-b^2)^{1/2}\kappa$]，則这二条件可同时确定 h 及 l 的特征值．

今后我們將設(1)中的 ω 不变，因此 h 及 l 具有特征值．当 $\omega\to 0$ 时，l 的特征值趋近于 $l_n=n(n+1)k^2$，$n=0, 1, \cdots$，屬于每一个 l_n 的有 h 的 $2n+1$ 个特征值，这是屬于 Lamé 多項式(見 §15–1–1)的 h 的特征值．这表明，对于 $\omega=0$，l 的特征值都是退化的(或多重的)；这一退化在 $\omega\neq 0$ 时消失(見 Strutt 1932, p 61)．

如 h 及 l 具有特征值，则 $u_0(z)$ 是第一类 Lamé 波函数．我們在上面已經証明在这一情形下 $u_0(-z)$ 及 $u_0(z)$ 是綫性关联的，即 u_0 是 z 的偶函数或奇函数，用 15–5–1 及 16–4 節的同样方法可以証明 u_0 也是 $z-K$ 及 $z-K-Ki$ 的偶函数或奇函数．第一类 Lamé 波函数可按其在点 $0, K, K+Ki$ 上的宇称而分成 8 类，每一类中的函数可以它們在区間 $(0, K)$，$(K, K+K'i)$ 上的零点数來表征．对于这种函数，現在似尚沒有标准的定义，也还沒有一套完整的

記法.

像在 15-5, 16-4 節中一样, Lamé 波函数在 $z=0$, K, $K+iK'$ 上的性質可用以建立区間 $(0, K)$ 及 $(K, K+K'i)$ 上的許多 Sturm-Liouville 問題. 像在 15-5 節中一样,每一个 Lamé 波函数是二个 Sturm-Liouville 問題的公共特征函数,这二問題各屬于区間 $(0, K)$ 及 $(K, K+K'i)$ 之一. 对于每一个 Sturm-Liouville 問題,可得一些特征曲綫,也就是 h 的特征值依賴于 l 的关系,在 h, l-平面上这些曲綫的交点卽可以确定 h 及 l 的特征值. Lamé 波函数的正交性質可从这些 Sturm-Liouville 問題以及点 0, K, $K+K'i$ 上的对称性質中推出.

对于 Lamé 波函数,現在尙不知有積分方程,但 Möglich (1927) 曾導出橢球面波函数的積分方程. 从 16-1(21), (22) 可知

(7) $\quad \Psi(\beta, \gamma)=B(\beta)C(\gamma)$

滿足偏微分方程

$$(8)\qquad [(\operatorname{sn}\beta)^2-(\operatorname{sn}\gamma)^2]^{-1}\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial\beta^2}-\frac{\partial^2\Psi}{\partial\gamma^2}\right)$$
$$+\{\omega^2k^2[(\operatorname{sn}\beta)^2+(\operatorname{sn}\gamma)^2]-l\}\Psi=0$$

方程(8)在一橢球面上正則的解(見 15-1-1 節)称为橢球面波函数. 变換为 15-5(45) 的坐标 ϕ, θ 以后,我們將把(8)簡寫为

(9) $\quad L_{\theta,\phi}\Psi=0.$

現在考察

(10) $\quad \exp[i\kappa(x\sin\theta'\cos\phi'+y\sin\theta'\sin\phi'+z\cos\theta')]$,

如 θ', ϕ' 固定,則(10)所表示的是一平面波,因此是 $\Delta W+\kappa^2W=0$ 的一个解. 应用 15-1(8) 及 15-5(45), 并令 $\omega=(a^2-b^2)^{1/2}\kappa$, (10) 变为

$$(11)\qquad K(\theta,\phi;\theta',\phi')=\exp[i\omega(k\operatorname{sn}\alpha\sin\theta\sin\theta'\cos\phi\cos\phi'$$
$$+i\frac{k}{k'}\operatorname{cn}\alpha\sin\theta\sin\theta'\sin\phi\sin\phi'+i\operatorname{dn}\alpha\cos\theta\cos\theta')]$$

Möglich 証明，对于固定的 α, K 满足

$$(L_{\theta,\phi}-L_{\theta',\phi'})K=0, \tag{12}$$

并用 15-5-3 及 16-3 節中的同样方法，对于每一个固定的 α，導出了下列積分方程的特征函数，

$$\int_0^\pi\int_0^{2\pi} K(\theta,\phi;\theta',\phi')\Psi(\theta',\phi')\sin\theta'\,d\theta'\,d\phi'=\lambda\Psi(\theta,\phi) \tag{13}$$

它們都是以 15-5(45) 的坐标 θ, ϕ 表示的橢球面波函数.

Lamé 波函数的实际構造現在还所知很少. 橢球面波函数在 $\omega\to 0$ 时轉化为橢球面調和函数，因此，可將橢球面波函数展为 Lamé 函数之積的級数(即，展为橢球面調和函数的級数). 对于 ω 的很小值，这个展开式应收斂得很快(見 Strutt, 1932, p 60 ff).

Möglich (1927)用不同的方法展开了積分方程(13)的核，并給 α 以各个特殊值(大多是 0, $\pm K$, $\pm K\pm K'i$)，因而求得了很多 Lamé 波函数的展开式. 他的結果中最值得重視的是橢球面波函数展为球面調和函数的級数展开式，Lamé 波函数展为变数 $k'^{-1}\,\mathrm{dn}\,z$ 的 Legendre 函数的級数展开式(其他可能的变数是 $\mathrm{sn}\,z$, $k\,\mathrm{sn}\,z$, $\mathrm{cn}\,z$, $i\,kk'^{-1}\,\mathrm{cn}\,z$ 及 $\mathrm{dn}\,z$)，以及 Lamé 波函数展为球面 Bessel 函数 16-9(6) 的級数展开式. 后面的几个展开式可用以表示 Lamé 波函数在 $z\to iK'$ 时的漸近性态.

在展为 Bessel 函数級数的 Möglich 展开式中，如以 $\psi_\nu^{(j)}$, $j=2,3,4$ 代替 $\psi_\nu^{(1)}$ (Möglich 求得了 $\psi_\nu^{(4)}$ 的級数，他称之为第二类積分)，即得第二类及第三类 Lamé 波函数. 对于橢球体波函数來說，16-1-4 節中的 B 及 C 是第一类 Lamé 波函数，而 A 則是第一类或第三类 Lamé 波函数，根据橢球体波函数是構作在橢球的內部或外部而定.

关于橢球体波函数的進一步研究見 Malurkar(1935) 及 Möglich (1927).

参 考 文 献

Abramowitz, Milton, 1949: *J. Math, Phys.* 28, 195 199.

Bickley, W. G., 1945: *Mathematical tables and other aids to computation*, 1, 409–419.

Bickley, W. G., and N. W. McLachlan, 1946: *Mathematical tables and other aids to computation*, 2, 1–11.

Blanch, Gertrude, 1946: *J. Math. Phys.* 25, 1–20.

Bouwkamp, C. J. 1941: *Theoretische en numerieke behandeling van de buiging door een ronde opening*, Groningen-Batavia.

Bouwkamp, C. J., 1947: *J. Math. Phys.* 26, 79–92.

Bouwkamp, C. J., 1950: *Proc. Nederl. Akad. Wetensch.* 53, 931–944.

Bouwkamp, C. J., 1950 a: *Philips Res. Rep.* 5, 87–90.

Dougall, John, 1916: *Proc. Edinburgh Math. Soc.* 34, 176–196.

Eberlein, W. F., 1948: *Phys. Rev.* 74, 190–191.

Erdélyi, Arthur, 1936: *Math. Z.* 41, 653–664.

Erdélyi, Arthur, 1938: *Compositio Math.* 5, 435–441.

Erdélyi, Arthur, 1942: *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 38, 28–33.

Erdélyi, Arthur, 1942 a: *Proc. Edinburgh Math. Soc.* (2) 7, 3–15.

Fisher, Ernst, 1937: *Philos. Mag.* (7) 24, 245–256.

Hanson, E. T., 1933: *Philos. Trans. A* 232, 223–283.

Humbert, Pierre, 1926: *Fonctions de Lamé et fonctions de Mathieu* (*Mémorials des sciences mathématiques, Fasc.* 10). Paris. Gauthier-Villars.

Ince, E. L., 1923: *Proc. Edinburgh Math. Soc.* 41, 94–99.

Ince, E. L., 1927: *Ordinary differential equations*. Longmans, Green and Co.

Ince, E. L., 1932: *Proc. Royal Soc. Edinburgh* 52, 355–433.

Ince, E. L., 1939: *Proc. Royal Soc. Edinburgh* 59, 176–183.

Jahnke, Eugen and Fritz Emde, 1938: *Tables of functions with formulae and curves*. Teubner, Leipzig and Berlin.

Langer, R. E., 1934: *Trans. Amer. Math. Soc.* 36, 637–695.

Leitner, A. and R. D. Spence, 1950: *J. Franklin Inst.* 249, 299–321.

Magnus, Wilhelm, 1953: *Infinite determinants in the theory of Mathieu's and Hill's equations*. Mathematics Research Group, Washington Square College of Arts and Science, New York University, Res. Rep. No. BR-1.

Malurkar, S. L., 1935: *Indian J. Phys.* 9, 45–80 and 251–254.

McLachlan, N. W., 1947, *Theory and application of Mathieu functions*. Oxford.

Meixner, Josef, 1944: *Die Laméschen Wellenfunktionen des Drehellipsoids*.

ZWB Forschungsbericht No. 1952. English translation appeared as NACA Technical Memorandum No. 1221, April 1949.

Meixner, Josef, 1947: *Z. Angew. Math. Mech.* 25–27, 1–2.

Meixner, Josef, 1948: *Z. Angew. Math. Mech.* 28, 304–310.

Meixner, Josef, 1949: *Arch. Math.* 1, 432–440.

Meixner, Josef, 1949 a: *Math. Nachr.* 3, 9–19.

Meixner, Josef, 1950: *Math. Nachr.* 3 193–207.

Meixner, Josef, 1951: *Math. Nachr.* 5, 1–18.

Meixner, Josef, 1951 a: *Math. Nachr.* 5, 371–378.

Möglich, Friedrich, 1927: *Ann. d. Phys.* (4) 83, 609–734.

National Bureau of Standards, Computation Laboratory, 1951: *Tables relating to Mathieu functions.* Columbia Univeresity Press, New York.

Poole, E. G. C., 1936: *Introduction to the theory of linear differential equations.* Oxford.

Schäfke, F. W., 1950: *Math. Nachr.* 4, 175–183.

Schäfke, F. W., 1953: *Math. Z.* 58, 436–447.

Schmid, H. L., 1948: *Math. Nachr.* 1, 377–398.

Schmid, H. L., 1949: *Math. Nachr.* 2, 35–44.

Sieger, Bruno, 1908: *Ann. d. Phys.* (4) 27, 626–664.

Sips, Robert, 1949: *Trans. Amer. Math. Soc.* 66, 93–134.

Sips, Robert, 1949 a: *Bull. Soc. Sci, Liège* 18, 498–515.

Sips, Robert, 1953: *Bull. Soc. Royale des Sci. de Liège*, 22, 341–387, 444–455, 530–540.

Sips, Robert, 1954: *Bull, Soc. Royale Sci. de Liège*, 23, 41–51, 90–102.

Spence, R. D. *The scattering of sound from prolate spheroids.* Contract report undated.

Stratton, J. A., P. M. Morse, L. J. Chu, and R. A. Hutner, 1941: *Elliptic cylinder and spheroidal wave functions.* Wiley.

Strutt, M. J. O., 1932: *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*, vol. 1, no. 3 Berlin, Springer.

Strutt, M. J. O., 1935: *Nieuw Arch. voor Wiskunde*, 18, 31–55.

Strutt, M. J. O., 1943: *Nederl. Akad. Wetensch. Verslagen, Afd. Natuurkunde* 52, 83–90, 97–104, 153–162, 212–222, 488–496, 584–591.

Strutt, M. J. O., 1948: *Proc. Royal Soc. Edinburgh A*, 62, 278–296.

Svartholm, N., 1938: *Z. Physik*, 111, 186–194.

Weinstein, D. H., 1935: *Philos. Mag.* (7) 20, 288–294.

Whittaker, E. T., and G. N. Watson, 1927: *A course in modern analysis*, Cambridge.

第十七章　数論函数導引

緒　論

本章的目的僅在于闡明数論中較普通函数的初步概念，指出一些有关文献．我們不准备作通盤的研究，特别是有关于代数数的整个理論在我們这里是節略了，所有需用到零，賦值，及其他代数概念的定义的科目也都不提．

为了在本書中避免引用太多的参考資料，这里特列出了一分标准著作表，以备每一分節中所敍述的科目查考．整个本章的敍述，以 L. E. Dickson (1919–1923) 的著作为最重要的來源．各分節的参考書目如下：

17–1.　L. E. Dickson (1919, vol. I); Hardy & Wright, 1938, 1945.

17–2.　MacMahon, 1915, 1916; Hardy & Wright, 1938, 1945.

17–3.　L. E. Dickson, 1919–1923.

17–5.　Landau, 1927, vol. I.

17–6.　Landau, 1927, vol. I; Hardy & Wright, 1938, 1945.

17–7.　Landau, 1927. vol. II; Titchmarsh, 1930, 1951; Ingham, 1932.

17–8.　Landau, 1927, vol, I; 1909, vol. I.

17–10.　Landau, 1927, vol. II.

17–1.　由黎曼 ζ-函数生成的数論初等函数

17–1–1.　記法及定义

整个本章中將应用如下記法：

l, m, n	表示正整数(除非另有規定)。
$m\mid n$	表示 m 除得尽 n
$m\nmid n$	表示 m 除不尽 n
(m, n)	表示 m, n 的最大公約数,如 $(m, n)=1$,則 m, n 謂之互質.
$\sum\limits_{d\mid n}, \prod\limits_{d\mid n}$	过 n 的所有(正的)整除数 d 的和或積.
$\sum\limits_{(m, n)=1}$	过所有与 n 互質的 m 的和
$\left.\begin{matrix}p, p_1, p_2\\ q, q_1, q_2\end{matrix}\right\}$	表示質数,即除了1与它本身之外沒有因数而 >1 的数。
$\sum\limits_{p}, \prod\limits_{p}$	过所有質数 $p=2, 3, 5, 7, 11, \cdots$ 的和或積

(1) $n=p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_\nu^{\alpha_\nu}$

是 n 的标准表示式(或标准分解式),寫成不同質数的冪的相乘積。除了 $n=1$ 之外,我們設

(2) $\alpha_1>0, \alpha_2>0, \cdots \alpha_\nu>0.$

$\nu(n)$	表示 n 的不同質因子的个数;$\nu(1)=0$.
$\phi(n)$	表示 Euler 函数. 它是与 n 互質而不大于 n 的正整数 m 的个数。
$\phi_k(n)$	$=\sum\limits_{(m,n)=1, 1\le m\le n} m^k \cdot \phi_0(n)=\phi(n)$.
$J_k(n)$	$k=1, 2, 3, \cdots$ 表示 Jordan 函数,它是 k 个 $\le n$ 的正整数(相等的或不等的)的不同集合的个数,这 k 个正整数的最高公因数与 n 互質. $J_k(n)$ 的一个普通記法是 $\tau^k(n)$.
$d(n)=\sum\limits_{l\mid n} 1$	表示 n 的因数的个数
$d_k(n)$	$k=2, 3, 4, \cdots$, 表示把 n 表为 k 个不同因子相乘積的种数. 在表达式中因子次序不同的也視为不同的表达式.

(3) $\sigma_k(n)=\sum_{d|n} d^k$

表示 n 的因数(包括 1 及 n)的 k 次方的和。

(4) $d(n)=d_2(n)=\sigma_0(n)$.

我們將以 $\sigma(n)$ 表示 $\sigma_1(n)$.

下面的定义关系到 n 的标准表示式(1).

$\lambda(n)$ 表示 Liouville 函数. 如 n 具有标准表示式(1), 则 $\lambda(1)=1$, $\lambda(n)=(-1)^{\alpha_1+\cdots+\alpha_\nu}$.

$\mu(n)$ 表示 Möbius 函数, $\mu(1)=1$, $\mu(n)=(-1)^\nu$, 如 $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_\nu=1$. 否則 $\mu(n)=0$.

$\Lambda(n)$ 表示 0, 除非 $n=p^m$ 是一質数的乘方. 此时 $\Lambda(n)=\log p$.

积性函数 是对所有正整数 n 定义的函数 $f(n)$, 对于这个函数, 如 $(n, m)=1$, 有

(5) $f(n)f(m)=f(nm)$,

称这一函数为积性函数. 如对于所有的 m, n 常有 $f(n)f(m)=f(nm)$, 則称 $f(n)$ 为完全积性函数. 有时也称为可析函数或分配函数.

在本節定义的函数也称为算術函数,这一名称適用于任一对所有正整数 n 定义的函数 $f(n)$.

17-1-2. 顯表达式与母函数

如 n 寫成标准表示式(1), 則 $\phi(1)=1$, $J_k(1)=1$, 而且对于 $n>1$

(6) $\phi(n)=n(1-p_1^{-1})(1-p_2^{-1})\cdots(1-p_\nu^{-1})$

(7) $J_k(n)=n^k(1-p_1^{-k})(1-p_2^{-k})\cdots(1-p_\nu^{-k})$

(8) $d(n)=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_\nu+1)$

(9) $\sigma_k(n)=\dfrac{p_1^{k(\alpha_1+1)}-1}{p_1^k-1}\cdots\dfrac{p_\nu^{k(\alpha_\nu+1)}-1}{p_\nu^k-1}$.

对于一个積性函数 $f(n)$，有基本恆等关系

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \prod_{p} [1 + f(p) + f(p^2) + \cdots]$$

这一式在左側級数絕对收斂时正确，此时右側的積也是絕对收斂的，称为級数的 Euler 乘積．如 $f(n)$ 是完全積性函数，則 $1+f(p)+f(p^2)+\cdots$ 是一几何級数，于是

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \prod_{p} [1 - f(p)]^{-1}, \qquad f(n) \text{ 完全積性函数.}$$

將基本恆等关系应用于完全積性函数 n^{-s} 及一些有关的積性函数上，可得許多包含 Riemann ζ 函数的恆等关系．ζ 函数將在 17–7 節中討論，下面的許多恆等式就是这样得出的．

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \prod_{p} (1 - p^{-s})^{-1} \qquad \operatorname{Re} s > 1$$

(10) $$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) n^{-s} \qquad \operatorname{Re} s > 1$$

(11) $$\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \phi(n) n^{-s} \qquad \operatorname{Re} s > 2$$

$$\frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(n) n^{-s} \qquad \operatorname{Re} s > 1$$

$$\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} = \sum_{n=1}^{\infty} |\mu(n)| n^{-s} \qquad \operatorname{Re} s > 1$$

(12) $$\frac{[\zeta(s)]^2}{\zeta(2s)} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{\nu(n)} n^{-s} \qquad \operatorname{Re} s > 1$$

(13) $$[\zeta(s)]^k = \sum_{n=1}^{\infty} d_k(n) n^{-s} \qquad \operatorname{Re} s > 1,\ k = 2, 3, \cdots$$

(14) $$\frac{[\zeta(s)]^4}{\zeta(2s)} = \sum_{n=1}^{\infty} [d(n)]^2 n^{-s} \qquad \operatorname{Re} s > 1$$

(15) $$\zeta(s)\zeta(s-k) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_k(n) n^{-s} \qquad \operatorname{Re} s > \max(1, \operatorname{Re} k + 1)$$

(16)　$$\frac{\zeta(s)\zeta(s-a)\zeta(s-b)\zeta(s-a-b)}{\zeta(2s-a-b)}=\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_a(n)\sigma_b(n)n^{-s}$$

$\operatorname{Re} s>\max[1, \operatorname{Re} a+1, \operatorname{Re} b+1, \operatorname{Re}(a+b)+1]$

(17)　$$[\zeta(s)]^k\prod_p P_{k-1}\left(\frac{1+p^{-s}}{1-p^{-s}}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}[d_k(n)]^2 n^{-s}$$

$\operatorname{Re} s>1,\ k\geqslant 2,$

式中 P 表示 Legendre 多項式(定义見 §3. 6. 2),

(18)　$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)n^{-s},$$

此处的一撇表示对 s 的導数．关系式(14)，(16)系由 Ramanujan 所發現，(17) 由 Titchmarsh 所証明；(16) 由 Chowla (1928) 所導出．

公式 (10)，(11)，(12)，(13)，(14) (15)，(16)，(17)，(18) 左边的函数可以当作是右側的 n^{-s} 的系数的母函数，因为有下面的引理：

引理　对于所有实数 $s\geqslant s_0$，如 $\sum_{n=1}^{\infty}c_n n^{-s}=0$，且如級数在 $s=s_0$ 时絕对收斂，則 $c_n=0,\ n=1, 2, 3,\cdots$ (見 Hardy & Wright, 1945. §17-1).

17-1-3.　关系及性質

函数 $\phi(n)$，$\mu(n)$，$J_k(n)$ 都是積性函数，且

(19)　$$\sum_{d|n}\Lambda(d)=\log n.$$

函数 $\phi(n)$ 及 $\mu(n)$ 由 Möbius 反演公式(或称 Dedekind-Liouville 公式)所联系．設 $f(n)$ 对所有的 $n=1, 2, 3\cdots$ 定义，并設

(20)　$$g(n)=\sum_{d|n}f(d),$$

則

(21)　$$f(n)=\sum_{d|n}\mu(d)g\left(\frac{n}{d}\right),$$

且反之亦真. 特别是:

(22) $n=\sum_{d|n}\phi(d),\ \phi(n)=\sum_{d|n}\frac{n}{d}\mu(d).$

Möbius 反演公式是下式的一个推論,卽

(23) $\sum_{d|n}\mu(d)=\begin{cases}0 & 如\ n>1\\ 1 & 如\ n=1.\end{cases}$

这一式也可寫成如下形式:

(24) $f(x)=\sum_{m=1}^{\infty}\mu(m)m^{-s}F(mx),$

如

(25) $F(x)=\sum_{m=1}^{\infty}m^{-s}f(mx)$

其中 $f(x)$ 对所有 $x>0$ 定义,当 $x\to\infty$ 时, $|f(x)|=O(x^{s_0})$, 且 $\mathrm{Re}\, s>s_0+2$.

另一个反演公式(見 Hardy 及 Wright, 1945, 第 16 章)是:下面的方程中,其任一个是另一个的推論

$$G(x)=\sum_{n=1}^{[x]}F\left(\frac{x}{n}\right),\quad F(x)=\sum_{n=1}^{[x]}\mu(n)G\left(\frac{x}{n}\right)$$

式中 x 是正的实变数, $[x]$ 表示 $\leqslant x$ 的最大整数, 如 $x<1$, 則空的和应解释为 0. 如对所有的 x 有 $F(x)=1$, 則得 E. Meissel 公式

$$\sum_{m=1}^{n}\mu(m)\left[\frac{n}{m}\right]=1.$$

Möbius 反演公式曾被推廣[見 Cesáro, 1887; H. F. Baker, 1889; Gegenbauer, 1893; E. T. Bell, 1926], 并用以作为算術積分和微分的定义,(20)式中的 $g(n)$ 称为 $f(n)$ 的"積分"[見 L. E. Dickson, 1919, 第一册, 14 章]. μ 与 ϕ 之間的另一关系由 Rademacher 提出,并由 R. Brauer (1926) 証明,如下:

(26) $\phi(m)\sum_{d|m,(d,n)=1}\frac{d}{\phi(d)}\mu\left(\frac{m}{d}\right)=\mu(m)\sum_{d|(m,n)}d\mu\left(\frac{m}{d}\right).$

对于 ϕ 函数,有

(27) $\sum_{d|n}(-1)^{n/d}\phi(d)=\begin{cases}0 & 如\ n\ 为偶数\\ -n & 如\ n\ 为奇数,\end{cases}$

(28) $\sum_{l=1}^{n}\phi(l^r)\left\{1^{r-1}+2^{r-1}+\cdots+\left[\frac{n}{l}\right]^{r-1}\right\}=1^r+2^r+\cdots+n^r$

其中 $r=1, 2, 3, \cdots$, $[x]$ 表示 $\leqslant x$ 的最大整数.

(29) $\sum_{d|n}(n/d)\phi_k(d)=1^k+2^k+\cdots+n^k \qquad k=0, 1, 2, \cdots$

(30) $\phi_1(n)=\frac{1}{2}n\phi(n) \qquad n>1$

(31) $\sum_{d|n}(n/d)^3\phi_3(d)=\{\sum_{d|n}(n/d)\phi(d)\}^2$

(32) $\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n^2}[\phi(1)+\phi(2)+\cdots+\phi(n)]\right\}=\frac{3}{\pi^2}$

(33) $\liminf_{n\to\infty}\left(\frac{\phi(n)}{n}\log\log n\right)=e^{-\gamma}$

式中 γ 表 Euler 常数. Davenport (1932) 曾証明对于 $n\to\infty$, 有

$$\phi_\alpha(n)=\frac{n^\alpha}{\alpha+1}\{\phi(n)+O(1)\} \qquad \alpha\geqslant 0$$

并对 $\alpha<0$ 也得出了类似結果.

函数 $\mu(n)$ 可表成如下形式

(34) $\mu(n)=\sum_{(m,n)=1}e^{2\pi i m/n}$

这就是說 $\mu(n)$ 是 1 的 n 次原根之和,或是滿足下述条件的数 ρ 的和,即 $\rho^n=1$, 但如 $1\leqslant m<n$, 則 $\rho^m\neq 1$. 这些数 ρ 是下列多項式的根:

(35) $k_n(x)=\prod_{d|n}(x^d-1)^{\mu(n/d)}$

这多項式是 $\phi(n)$ 次的.

下面的結果可参看 Landau (1927, 第二册, 第 7 章) 及 Titchmarsh (1951). 設

(36) $M(n)=\mu(1)+\mu(2)+\cdots+\mu(n)$

則对于 $n\to\infty$, 有

(37) $$M(n)=O\left[n^{½}\exp\left(\frac{A\log n}{\log\log n}\right)\right]$$

其中 A 是一正实常数．这一結果的一个推論是：

(38) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n}=0.$$

Riemann 的假設（見 17-7 節）在而且只有在

(39) $$\sum_{n=1}^{\infty}\mu(n)n^{-s}$$

对所有的 s, $\mathrm{Re}\, s>½$ 收斂时真实．

对于 $\Lambda(n)$，类似于(38)的公式为

(40) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)-1}{n}=-2\gamma,$$

其中 γ 表 Euler 常数，定义見 1-1(4)．还可参看 Kienast (1926).

关于下面的 $\sigma(n)$ 及 $d(n)$ 的性質，見 Hardy-Wright (1945, 第 18 章)：

$$\sigma(n)=O\,(n\log\log n)$$

$$\sigma(1)+\sigma(2)+\cdots+\sigma(n)=\frac{1}{12}\pi^2n^2+O\,(n\log\log n).$$

存在有一个正常数 A，滿足条件

$$A<\frac{\sigma(n)\phi(n)}{n^2}<1,$$

$$\limsup_{n\to\infty}\{\sigma_\alpha(n)n^{-\alpha}\}=\zeta(\alpha)\qquad \alpha>1$$

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\sigma(n)}{n\log\log n}=e^{\gamma}$$

（見 Gronwall, 1913）．关于 $-1<\alpha<0$ 的情形見 Bellmann (1950).

Vaidyanathaswamy (1930, 1931) 曾証明

$$\sigma_k(m,n)=\sum_{d\mid(m,n)}\sigma_k\left(\frac{m}{d}\right)\sigma_k\left(\frac{n}{d}\right)d^k\mu(d),$$

G. N. Watson (1935) 曾証明，对于几乎所有的 n 值，$\sigma_{2m+1}(n)$ 可被任一固定整数 k 除尽．这里所說的"几乎所有"，其定义見 17-2

節的开头部分.

如 $\varepsilon>0$ 任意而不变,則对于所有充分大的 n, 常有

$$d(n)<2^{(1+\varepsilon)\log n/\log\log n},$$

而对于 n 的無限多的值,有

$$d(n)>2^{(1-\varepsilon)\log n/\log\log n},$$

对于 $n\to\infty$, 有

$$d(1)+d(2)+\cdots+d(n)=n\log n+(2\gamma-1)n+O(n^{1/2})$$

其中 γ 表 Euler 常数. 对于 $d[d(n)]$ 及有关問題見 Ramanujan (1915).

Titchmarsh (1938) 曾研究了 n 很大时

$$d_k(1)+d_k(2)+\cdots d_k(n)$$

的漸近性态.

如 $Q(n)$ 表示不能被 >1 的一个整数的平方除尽的整数 m 的个数, $1\leqslant m\leqslant n$, 則对于 $n\to\infty$, 有

$$Q(n)=6n/\pi^2+O(n^{1/2}).$$

算術函数的一般定理. Bellmann 及 Shapiro (1948) 曾証明: 函数 n, $\phi(n)$, $\sigma(n)$, $d(n)$, $2^{\nu}(n)$, $\mu(n)$ 都是代数独立的.

Schoenberg 研究了算術函数类的漸近性質. 关于加性算術函数的研究見 Erdös Wintner (1939). 关于其他結果見 E. T. Bell (1930); D. H. Lehmer (1931).

17-2. 分拆 (*Partition*)

17-2-1. 記法和定义

我們以

(1) $a\equiv b \pmod n$

表示 $a-b$ 是一整数,可被 n 除尽

設 $\{a_\nu\}$, $\nu=1, 2, 3, \cdots$ 为正整数的一个集合 S. 并設 $N(x)$ 为 S 中不大于 x 的 a_ν 的数目. 設

(2) $\lim_{x\to\infty} x^{-1}N(x)=\alpha$

存在．如 $\alpha=0$，我們說几乎沒有一个整数 n 屬于 S．如 $\alpha=1$，則說几乎所有的整数 n 都屬于 S

把 n 分拆成任意个正整数 $m_1, m_2, \cdots, m_k$ 之和的种数

(3) $n=m_1+m_2+\cdots+m_k \qquad k=1, 2, 3\cdots$

称为 n 的分拆种数，記为 $p(n)$，此处

(4) $m_1\geqslant m_2\geqslant\cdots\geqslant m_k$.

如 k 受有限制，使

(5) $k\leqslant l$

則我們把 n 分成至多 l 部分之分拆数記为 $p_l(n)$．如 m_1 也受限制，$m_1\leqslant N$，則把 n 分成至多 l 部分，其每一部分都不超过 N 的分拆数記为 $p_{l,N}(n)$．把 n 分成偶数个不等部分之分拆数記为 $E(n)$，把 n 分成奇数个不等部分之分拆数記为 $U(n)$．

17-2-2. 分拆和母函数

設 $P(n)$ 为 n 的某一类型的分拆数，而且設，对于充分小的 $|x|$，無窮級数

(6) $$\sum_{n=1}^{\infty} P(n)x^n=F(x)$$

收斂，則母函数 $F(x)$ 称为枚举 $P(n)$．这意思是应包括 $F(0)\neq 0$ 的情形；因此 $P(0)$ 应定义为等于 $F(0)$．于是有：

(7) $$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n=\prod_{k=1}^{\infty}\{1-x^k\}^{-1} \qquad |x|<1$$

(8) $$\sum_{n=0}^{\infty} p_m(n)x^n=\prod_{k=1}^{m}(1-x^k)^{-1} \qquad |x|<1.$$

关系式(8)表明：$p_m(n)$ 也就是把 n 分为不超过 m 的部分的分拆数．我們同样也可以証明把 n 恰巧分成 m 分的分拆数等于 n 分成若干部分，其最大数恰为 m 的分拆数．

关于分拆的很多定理都可以寫成枚举函数 $F(x)$ 的恆等式形式．这些恆等式通常屬于如下类型：$F(x)$ 同时表达为一个無窮乘積及一級数；乘積以及級数的每一項都可以展为 x 的冪級数．例如：

$$(9)\qquad \prod_{k=0}^{\infty}(1+x^{2^k})=\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,$$

$$(10)\qquad \prod_{k=1}^{\infty}(1+x^k)=\prod_{k=1}^{\infty}\{1-x^{2k-1}\}^{-1}.$$

Euler 恆等式：

$$(11)\qquad \prod_{k=1}^{\infty}(1+x^{2k-1})=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{k^2}}{(1-x^2)(1-x^4)\cdots(1-x^{2k})},$$

$$(12)\qquad \prod_{k=1}^{\infty}(1+x^{2k})=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{k(k+1)}}{(1-x^2)(1-x^4)\cdots(1-x^{2k})},$$

$$(13)\qquad \prod_{k=1}^{\infty}(1-x^k)^{-1}=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^k)},$$

$$(14)\qquad \prod_{k=1}^{\infty}(1-x^k)^{-1}=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{k^2}}{(1-x)^2(1-x^2)^2\cdots(1-x^k)^2},$$

$$(15)\qquad \prod_{k=1}^{\infty}(1-x^k)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m x^{\frac{1}{2}m(3m+1)}.$$

Jacobi 恆等式：

$$(16)\qquad \prod_{k=1}^{\infty}\{(1-x^{2n})(1+x^{2n-1}z^2)(1+x^{2n-1}z^{-2})\}$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}x^{n^2}(z^{2n}+z^{-2n})=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x^{m^2}z^{2m}\qquad z\neq 0$$

$$(17)\qquad \prod_{k=1}^{\infty}\{(1-x^{2k-1})^2(1-x^{2k})\}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m x^{m^2},$$

$$(18)\qquad \prod_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1-x^{2k}}{1-x^{2k-1}}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}x^{\frac{1}{2}n(n+1)},$$

$$(19)\qquad \prod_{k=1}^{\infty}(1-x^k)^3=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)x^{\frac{1}{2}n(n+1)},$$

$$(20)\quad \prod_{k=0}^{\infty}\{(1-x^{5k+1})(1-x^{5k+4})(1-x^{5k+5})\}$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m x^{\frac{1}{2}m(5m+3)},$$

$$(21)\quad \prod_{k=0}^{\infty}\{(1-x^{5k+2})(1-a^{5k+3})(1-x^{5k+5})$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m x^{\frac{1}{2}m(5m+1)}$$

Regers-Ramanujan 恆等式:

$$(22)\quad \prod_{k=0}^{\infty}\{(1-x^{5k+1})^{-1}(1-x^{5k+4})^{-1}\}$$

$$=1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^{m^2}}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)},$$

$$(23)\quad \prod_{k=0}^{\infty}\{(1-x^{5k+2})^{-1}(1-x^{5k+3})^{-1}\}$$

$$=1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^{m(m+1)}}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)}.$$

恆等式 (17) 至 (22) 以及 (15) 可从 Jacobi 公式(16)導出,以 $z=e^{i\pi u}$, $x=e^{i\pi\tau}$; (16)的右側变为 $\theta_3(u|\tau)$ 的富里哀展开式;左側是 θ_3 的無窮乘積展开式,此处 θ_3 是普通記法中的橢圓 θ 函数之一 (見第 13 章). 分拆問題与模形式之間的关系由 Rademacher (1940) 提出.

公式(9)至(23)可寫成分拆定理形式,这种定理的例子如下:

公式(9)表明每一 n 恰可用一种方法表示为 2 的不同次方之和.

公式(10)表明 n 分成不等部分之分拆数等于分成奇数个部分之分拆数.

公式(15)表明:

$$E(n)-U(n)=(-1)^k,\quad \text{如 } n=\tfrac{1}{2}k(3k\pm1),$$
$$k=1,2,3,\cdots,m,$$

$$E(n)-U(n)=0, \qquad \text{所有其他的 } n,$$

其中 E, U 的定义見 17-2-1 節.

(22)式右側和的通項枚举了 $n-m^2$ 分成至多 m 部分的分拆数. 因为

$$m^2=1+3+\cdots+2m-1,$$

故知它也枚举了 n 分成至多 m 个最小差 2 的部分之和的分拆数. 因此,(22)式表明: n 分成 $5m+1$ 及 $5m+4$ 形式的部分的分拆数等于 n 分成最小差 2 的部分的分拆数.

关于把 n 分成 $6m+1$, $6m+5$ 形式的部分的分拆数定理見 Schur (1926); 这一种数的漸近公式由 Niven (1940) 提出.

关于分拆理論中某些恆等式的不存在性見 D. H. Lehmer (1946), Alder (1948).

17-2-3. 同余性質

下面的关系由 Ramanujan (1919, 1921) 提出,并由 Darling (1921), Mordell (1922) 証明:

(24) $p(5n+4)\equiv 0 \pmod 5$

(25) $p(7n+5)\equiv 0 \pmod 7$

(26) $p(11n+6)\equiv 0 \pmod{11}$.

这些关系可从某些恆等式中導出,導出前二个关系的恆等式为:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(5n+4)x^n=5\prod_{k=1}^{\infty}\frac{(1-x^{5k})^5}{(1-x^k)^6}, \tag{27}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(7n+5)x^n=7\prod_{k=1}^{\infty}\frac{(1-x^{7k})^3}{(1-x^k)^4}+49x\prod_{k=1}^{\infty}\frac{(1-x^{7k})^7}{(1-x^k)^8}. \tag{28}$$

对于 $p(13n+6)$ 的枚举函数,也有类似的恆等式,系由 Rademacher 及 Zuckerman (1939) 所發現. 但这一恆等式右側的所有項并不都能被 13 整除.

Watson (1938) 曾証明

(29) $p(n) \equiv 0 \pmod{7^b}$

如 $n=7^b n'$, 此处 $(n', 7)=1$, 且 $b=2, 3, 4, \cdots$, 又如 $24n \equiv 1 \pmod{7^{2b-2}}$. 关于这种类型的結果的討論見 Rademacher (1940).

D. H. Lehmer (1936, 1938) 曾証明

(30) $p(599) \equiv 0 \pmod{5^4}$,

(31) $p(721) \equiv 0 \pmod{11^3}$

(32) $p(14031) \equiv 0 \pmod{11^4}$

从此証明了 Ramanujan 的某些推測在一定的特殊情况下是正确的. 数 $p(14031)$ 具有127位数字, 对于 $p(n)$, 可用 Hardy-Ramanujan 的漸近公式(見 17-2-4 節)來計算.

17-2-4. 漸近公式及有关問題

Hardy 及 Ramanujan (1916, 1918) 曾証明

(33) $\lim\limits_{n\to\infty} 4n\, 3^{1/2}\, p(n) \exp\left[-\pi\,(2n/3)^{1/2}\right]=1.$

他們还求得了 $p(n)$ 的漸近級数, 一直到階数为 $O(n^{-1/4})$ 的項; 由于 $p(n)$ 是一整数, 因此, 如果 n 足够大, 就可应用这一結果从漸近展开式精确地算出 $p(n)$. (D. H. Lehmer, 1938). 經簡化后的証明見 Knopp-Schur (1925). D. H. Lehmer (1937) 証明 Hardy-Ramanujan 級数是發散的. Rademacher (1937 a, 1937 b, 1943) 求得了 $p(n)$ 的一个收斂級数, 如下:

$$p(n)=\frac{1}{2^{1/2}\pi}\sum_{k=1}^{\infty} A_k(n)\, k^{1/2}\, \frac{d}{dn} f_k\left(n-\frac{1}{24}\right),$$

其中

$$f_k(n)=n^{-1/2}\sinh\left[\frac{\pi}{k}\left(\frac{2n}{3}\right)^{1/2}\right]$$

$$A_k(n)=\sum_{\substack{(h,k)=1\\ 1<h<k}} \exp\left\{-2\pi i n\frac{h}{k}+\pi i\sum_{\mu=1}^{k-1}\frac{\mu}{k}\left(\frac{h\mu}{k}-\left[\frac{h\mu}{k}\right]-\frac{1}{2}\right)\right\}.$$

$p(n)$ 的一个求和公式曾由 Atkinson (1939) 提出.

Husimi (1938) 研究过 $p_m(n)$ 的積分表示式.

Tricomi (1928) 研究过 $p_{l,N}(n)$ 的漸近性态, Brigham(1950) 研究过分拆函数的漸近公式.

有关这一子目的整个研究可參看 Rademacher (1940).

17-3. 平方和表示式

概説:將一整数表示为平方和的問題是其表示为二次定正型問題的一个特例. 表为二次型的問題見 Siegel (1935, 1936, 1937), Minkowski (1911). 將 n 表示为平方和的問題也可以看作是將一数表示为一定数的 k 次方之和的特例. 关于这一方面的許多結果可參看 Landau (1927, vol II.)

和

$$\sum_{n<x} r_k(n)$$

的計値(或近似計値)問題是在 k 維球中計算格点的問題. $k=2$ 的情形, 或关于二維空間中格点的一般理論, 可參看 Landau (1927, vol. II) 及本書 17-10 節.

17-3-1. 定义与記法

設 $k\geqslant 2$ 为一不变的整数. 命 $r_k(n)$ 代表 n 表为 k 个整数的平方之和的組数,

(1) $n=l_1^2+l_2^2+\cdots+l_k^2$

其中 $l_1,\cdots,l_k$ 不一定要互不相同,而且可以为負数或零. 二个表示式,如果它們所包含的数 $l_1,\cdots,l_k$ 相同而次序不同,也認为是不同的表示式. 例如, $r_2(2)=4$, 因为 $2=1^2+1^2=(-1)^2+1^2=1^2+(-1)^2=(-1)^2+(-1)^2$. 現在我們要求的是 n 的某一除数的乘方之和. 設 $d^*, d^{**}, d', d'', d_+, d_-, d_1, d_2, d_3, d_4$ 为 n 的任意正因数,滿足如下条件:

(2) $d^*\equiv 1 \pmod 4$, $d^{**}\equiv 3 \pmod 4$,

(3) $n/d' \equiv 1 \pmod 4$, $\qquad n/d'' \equiv 3 \pmod 4$,

(4) $d_+ \equiv 0 \pmod 2$, $\qquad d_- = 1 \pmod 2$,

(5) $d_1 \equiv 0 \pmod 2$, $\qquad n/d_1 = 0 \pmod 2$,

$d_2 \equiv 1 \pmod 2$, $\qquad n/d_2 \equiv 1 \pmod 2$,

(6) $d_3 \equiv 0 \pmod 2$, $\qquad n/d_3 \equiv 1 \pmod 2$,

$d_4 \equiv 1 \pmod 2$, $\qquad n/d_4 = 0 \pmod 2$.

幷設

(7) $E_k(n) = \Sigma\, d^{**} - \Sigma\, d^{**k}$,

(8) $E'_k(n) = \Sigma\, d'^k - \Sigma\, d''^k$,

(9) $\Delta_k(n) = \Sigma\, d_-^k$,

(10) $\zeta_k(n) = \Sigma\, d_-^k - \Sigma\, d_+^k$,

(11) $\xi_k(n) = \Sigma\, d_1^k + \Sigma\, d_2^k - \Sigma\, d_3^k - \Sigma\, d_4^k$.

我們还要求橢圓 θ 函数之某些積展为冪級数时的系数. 設 $\theta_\nu(u, \tau)$ $[\nu = 1, 2, 3, 4;\ \theta_4(u, \tau) = (u, \tau)]$ 代表四橢圓 θ 函数(見第 13 章). 以 θ_ν 表 $\theta_\nu(0, \tau)$, q 表 $e^{i\pi\tau}$. 于是

(12) $$\theta_4 = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^{2k})(1 - q^{2k-1})^2,$$

(13) $$\theta_2 = 2q^{1/4} \prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^{2k})(1 + q^{2k})^2,$$

(14) $$\theta_3 = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^{2k})(1 - q^{2k-1})^2.$$

应用 $\theta_4, \theta_2, \theta_3$ 的这些無窮乘積,根据下列母函数定义函数 $\Omega(m)$, $W(m)$, $G(m)$, $\Theta(m)$:

(15) $$16 \sum_{m=0}^{\infty} \Omega(m) q^m = \theta_2^4\, \theta_3^4\, \theta_4^4,$$

(16) $$16 \sum_{m=0}^{\infty} W(m)\, q^m = \theta_2^4\, \theta_3^6\, \theta_4^4,$$

(17) $$16 \sum_{m=0}^{\infty} \Theta(m)\, q^m = \theta_2^4\, \theta_3^{10}\, \theta_4^4,$$

(18) $$16\sum_{m=0}^{\infty}G(m)q^m=\theta_2^4\theta_4^4\theta_3^6(\theta_4^4-\theta_2^4).$$

17-3-2. $r_k(n)$ 的公式

表为偶数个平方之和的表示式.

Glaisher (1907) 給出了 $r_{2l}(n)$ 的已知公式在 $2l=2,4,\cdots,18$ 时的鑑定. 他的表由 Ramanujan (1918) 加以补充. 給出了 r_{20}, r_{22}, r_{24} 的公式. 对于 $2l\geqslant 12$, 这些公式中有 $\Omega(n)$, $W(n)$, $\Theta(n)$, $G(n)$ 型的函数,它們在数論上幷沒有意义. (关于只包含数論上有意义的表达式的公式曾由 Boulyguine 導出,見 Dickson, 1939, vol. II, p. 317). 对于 $2l=10$ 及 $2l=18$, Glaisher 表的公式中也包含有过 r 的某些复因数之冪的和,这里,所謂 n 的复因数是数 $a+ib$, 其中 a, b 都是整数,且 $(a^2+b^2)|n$. 節略这二情形之后, Glaisher 表 (記法見 17-3-1 節) 如下:

(19) $$r_2(n)=4E_0(n),$$

(20) $$r_4(n)=(-1)^{n-1}8\,\xi_1(n),$$

(21) $$r_6(n)=4\{4E_2'(n)-E_2(n)\},$$

(22) $$r_8(n)=(-1)^{n-1}16\,\zeta_3(n),$$

(23) $$r_{12}(2n)=-8\,\xi_5(n),$$

(24) $$r_{12}(2n+1)=8\{\Delta_5(2n+1)+2\Omega(2n+1)\},$$

(25) $$r_{14}(n)=\frac{4}{61}\{64\,E_6'(n)-E_6(n)+364\,W(n)\},$$

(26) $$r_{16}(n)=(-1)^{n-1}\frac{32}{17}\{\zeta_7(n)+16\,\Theta(n)\}.$$

r_{24} 的公式見 17-4 節. $r_2(n)$ 的公式相当于橢圓 θ 函数理論中的一个恆等式,即

(27) $$\theta_3^2=\left\{\sum_{m=-\infty}^{\infty}q^{m^2}\right\}^2=1+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n}{1+q^{2n}}$$
$$=1+4\sum_{n,m=1}^{\infty}\left\{q^{(4m-3)n}-q^{(4m-1)n}\right\}.$$

下面的判別准則就是公式(19)的一个推論．設 $k(p)$ 是整除 n 的質数 p 的最高次冪．n 可表为二个数的平方之和的充要条件为：$k(p)$ 应为偶数，只要 $p=3 \pmod 4$．

公式(20)等价于 Jacobi 恆等式

$$(28)\quad \theta_3^4=\left\{\sum_{m=-\infty}^{\infty} q^{m^2}\right\}^4=-4q\frac{d}{dq}\left(\log\frac{\theta_2}{\theta_4}\right)$$
$$=1+8\sum_{n,m=1}^{\infty}\{nq^{nm}-4nq^{4nm}\}.$$

这也可以敍述如下：將 n 表为四个平方之和的組数等于 8 倍于 n 的因数之和，这些因数均非 4 之倍数．如 n 为奇数，則也等于 8 倍(如 n 为偶数，則为 24 倍)于 n 的奇数因数之和．因此有 Lagrange 定理：每一个 >0 的整数 n 都可表为四平方数之和．这也表明了：对于所有的 n，及 $k=4, 5, 6, \cdots$，有 $r_k(n)>0$．

表为奇数个平方数之和的表示式．

这一問題較之表为偶数个平方数之和的問題要复雜得多．n 之能表为三个平方数之和的充要条件是 n 不成如下形式：

$$(29)\quad 4^a(8b+7) \qquad a, b=0, 1, 2, \cdots$$

对于 n 的奇数值，Eisenstein (1847) 曾証明

$$(30)\quad r_3(4m+1)=24\sum_{l=1}^{m}\left(\frac{l}{4m+1}\right),$$

$$(31)\quad r_3(4m+3)=8\sum_{l=1}^{2m+1}\left(\frac{l}{4m+3}\right),$$

其中 $\left(\frac{l}{k}\right)$ 是 Legendre-Jacobi 符号，其定义見 17–5 節．

如 m 为一奇数而不为一質数平方之倍数，Eisenstein (1847) 提出了如下的結果，并由斯密司(1894)敏可夫斯基(1911)加以証明：

$$(32)\quad r_5(n)=-80s, -80\sigma, -112\sigma, 80s.$$

根据

$$n\equiv 1, \quad 3, \quad 5, \quad 7 \pmod 8)$$

而定. 应用 17–5 節的勒让特–雅可比符号,有

$$s=\sum_{\mu=1}^{\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}}\mu\left(\frac{\mu}{n}\right),\quad \sigma=\sum_{\mu=1}^{\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}}\mu\left(\frac{\mu}{n}\right).$$

哈台(1920)曾証明:把 n 表为 5 平方数之和的原始表示式(即最大公因数是 1 的 5 个平方数的表示式)的組数 $\bar{r}_5(n)$ 为

$$\bar{r}_5(n)=\frac{c}{\pi^2}n^{-\frac{3}{2}}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{n}{2l+1}\right)(2l+1)^{-2} \tag{33}$$

其中

$$c=80,\qquad 160,\qquad 112$$

根据

$$n\equiv 0,1,4,\quad n\equiv 2,3,6,7,\quad n\equiv 5\pmod 8)$$

而定.

对于更一般的結果,特别是 $r_7(n)$, 見 Mordell (1919 b), Stanley (1927), Hardy (1918, 1920, 1927).

哈台及雷門尼强(1918)曾求得了 $r_k(n)$ 在 $k=3,4,5,6,7,8$ 时恰切的漸近展开式.

17-4. 雷門尼强函数

我們用下式定义 Ramanujan 函数 $\tau(n)$, $n=1,2,3,\cdots$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)x^n=x\prod_{k=1}^{\infty}(1-x^k)^{24}. \tag{1}$$

雷門尼强函数与 $r_{24}(n)$(定义見 17–3–1 節)的关系为:

$$\frac{691}{16}r_{22}(2n)=\sigma_{11}(2n)-2\sigma_{11}'(n)-8[259\tau(2n)+512\tau(n)] \tag{2}$$

$$\frac{691}{16}r_{24}(2n+1)=\sigma_{11}(2n+1)+2072\tau(2n+1) \tag{3}$$

其中 $\sigma_{11}(m)$ 是 m 的因子的 11 次方之和, $\sigma_{11}'(m)$ 是其奇因数的 11 次方之和;見 Ramanujan (1916), Hardy (1927).

雷門尼强預測,并由莫特耳 (1916 b) 証明 $\tau(n)$ 是一積性函数

(意义見 17-1-1 節),而且

(4) $$\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)n^{-s}=\prod_{p}[1-\tau(p)p^{-s}+p^{11-2s}]^{-1}$$

其中 Re $s>13/2$, 乘積过所有的質数 p. 莫特耳还証明,对于所有的 p, 有

(5) $$\tau(p^m)=\tau(p)\tau(p^{m-1})-p^{11}\tau(p^{m-2}) \qquad m=2,3,4,\cdots$$

从(5)可知 $\tau(p^n)$ 是 $\tau(n)$ 及 p^{11} 的多項式;这一多項式由 Sengupta (1948) 确定. 关于

$$\sum_{n<x}\tau(n)(x-n)^k$$

展为貝塞尔函数級数的問題見 Wilton (1929) 及本書 17-11-2 節; 其他包含 $\tau(n)$ 的級数見 Van der Blij (1948).

Ramanujan 預測, Watson (1935) 証明: $\tau(n)$ 对几乎所有的 n (意义見 17-2 節前段)都可被 691 整除. 不过,正像 Ramanujan 所表明的, $\tau(n)$ 將不能被 691 整除,如果

$$1\leqslant n\leqslant 5000 \qquad n\neq 1381.$$

Walfisz (1938) 証明,对几乎所有的 n, $\tau(n)$ 可被

$$2^5\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7\cdot 691$$

整除. 关于 $\tau(n)$ 的同余性質見 Wilton (1929), Bambah-Chowla (1947). D. H. Lehmar 証明如

$$n<214928640000$$

則 $\tau(n)\neq 0$.

Mordell (1917) 为級数

(6) $$\left\{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(2n+1)^2}\right\}^4=\sum_{n=1}^{\infty}f(n)q^{4n}$$

的系数 $f(n)$ 証明了一个类似于(4)的公式,如下:

(7) $$\sum_{n=1}^{\infty}f(n)n^{-s}=\prod_{p}\{1-2f(p)p^{-s}+p^{5-2s}\}^{-1}.$$

这一公式也由 Ramanujan 預測到. 其他結果及推廣見 Rankin (1939).

17-5. 勒上特-雅可比符号

在本節中，$p, p_1, p_2, \cdots$ 表奇質数，u, v 表奇正整数.

我們称整数 k 为对模 n 之二次剩余或二次剩余 (mod n)，如果

(1) $x^2 \equiv k \pmod n$

具有一个整数解 x. 对于所有的 $k=0, \pm1, \pm2, \cdots$ 及所有的 $u=1, 3, 5, 7, \cdots$，我們定义 Legendre-Jacobi 符号 $\left(\frac{k}{u}\right)$ 如下. 如 $u=p$ 为一奇質数，

(2) $\left(\frac{k}{p}\right)=1$ 如 $p\nmid k$，且 k 是一二次剩余 (mod p)，

(3) $\left(\frac{k}{p}\right)=-1$ 如 $p\nmid k$，且 k 是二次非剩余 (mod p)，

(4) $\left(\frac{k}{p}\right)=0$ 如 $p\mid k$.

如 $u=p_1 p_2\cdots p_r$ 是 r 个奇質数之積(不一定要互不相同)，命

(5) $\left(\frac{k}{u}\right)=\left(\frac{k}{p_1}\right)\left(\frac{k}{p_2}\right)\cdots\left(\frac{k}{p_r}\right)$.

如 u, v 都是奇正整数，且 $(u, v)=1$，則

(6) $\left(\frac{u}{v}\right)\left(\frac{v}{u}\right)=(-1)^{(\frac{1}{2}u-\frac{1}{2})(\frac{1}{2}v-\frac{1}{2})}$

(7) $\left(\frac{-1}{u}\right)=(-1)^{\frac{1}{2}u-\frac{1}{2}}$.

(8) $\left(\frac{2}{u}\right)=(-1)^{(u^2-1)/8}$.

方程 (6), (7), (8) 称为互逆定理及其第一第二补充定理. 特别是，(7), (8) 表明：在而且只有在 $p\equiv1 \pmod 4$ 时，-1 才是二次剩余 (mod p)；在而且只有在 $p\equiv1$ 或 $p\equiv7 \pmod 8$ 时，2 才是二

次剩余 (mod p). 应当注意: $\left(\frac{k}{u}\right)=1$ 說明: 只有在 u 为奇質数时 k 才是二次剩余 (mod u).

Legendre 符号的推廣可应用代数数域理論來定义. 关于这一方面, 可參看 Hasse (1930).

Jacobsthal 和. 我們定义 s 的 q 次 Jacobsthal 和如下:

(9) $\Phi_q(s)=\sum_{m=1}^{p-1}\left(\frac{m}{p}\right)\left(\frac{m^q+\delta}{p}\right)$ $q=2, 3, \cdots, s=1, 2, 3\cdots.$

設質数 p 为 $p=4f+1$, 此处 f 为一正整数. 則 $p=a^2+b^2$, a, b 都是整数. Jacobsthal (1907) 曾証明

(10) $a=\frac{1}{2}\Phi_2(r), b-\frac{1}{2}\Phi_2(n), \frac{1}{2}\Phi_2(-1)=\frac{1}{2}(p-3)\pmod 8$,

其中 r 表任一二次剩余, n 表任一二次非剩余 (mod p.). Schrutka (1911) 及 Chowla (1949) 得出了 $p=6f+1=a^2+3b^2$ 的类似結果. 其他結果及推廣見 Whiteman (1949, 1952); E. Lehmer (1949).

17-6. 三角和及有关問題

Gauss 和. 設 n 为一正整数. 对于每一整数 m, 定义

(1) $S(m, n)=\sum_{r=0}^{n-1}\exp(2\pi i r^2 m/n).$

如 $(n, n')=1$, 則

(2) $S(m, nn')=S(mn', n)S(mn, n').$

对于 $m=1$

$$(3)\qquad S(1, n)=\begin{cases}(1+i)n^{\frac{1}{2}} & \text{如}\quad n\equiv 0\\ n^{\frac{1}{2}} & \text{如}\quad n\equiv 1\\ 0 & \text{如}\quad n\equiv 2\\ in^{\frac{1}{2}} & \text{如}\quad n\equiv 3\end{cases}\pmod 4.$$

如 $n=p$ 为一質数, 且 $(m, p)=1$, 則

(4) $$S(m,p)=\sum_{r=1}^{p-1}\left(\frac{r}{p}\right)\exp\left(\frac{2\pi irm}{p}\right)=\left(\frac{m}{p}\right)S(1,p)$$

$$=\begin{cases}\left(\frac{m}{p}\right)p^{1/2} & \text{如 } p\equiv 1 \pmod 4\\ \left(\frac{m}{p}\right)ip^{1/2} & \text{如 } p\equiv 3 \pmod 4).\end{cases}$$

其中$\left(\frac{m}{p}\right)$为 17-5 節定义的 Legendre 符号。

Ramanujan 和定义为

(6) $$c_n(m)=\sum_{(r,n)=1}\exp(2\pi ir\,m/n),$$

此处和式过数 $r=1,2,\cdots(n-1)$ 中使 $(r,n)=1$ 的那些数的集合。应用 Möbius 函数(見 17-1 節)得

(7) $$c_n(m)=\sum_{d|n,\,d|m}d\mu\left(\frac{n}{d}\right)$$

此处和式过所有能同时除尽 n 及 m 的正整数 d. 如 $(n,n')=1$, 則

(8) $$c_{nn'}(m)=c_n(m)c_{n'}(m).$$

包含 $c_n(m)$ 的一个和式为

(9) $$\sum_{m=1}^{\infty}m^{-1}c_n(m)=-\Lambda(n).$$

上式的証明見 Hölder (1936). 其应用見 Ramanujan (1918); $c_n(m)$ 在將一数表为平方和时很重要. 其級数展开式見 Carmichael (1932); 关于 Ramanujan 和的統計量見 Wintner (1942).

Kloosterman 和. 設 $n>0$ 为一整数,并設 r 为任一整数, $0<r\leqslant n$, 使 $(r,n)=1$. 則必存在有一个唯一地确定的 r', 滿足条件

(10) $$0<r'\leqslant n,\ rr'\equiv 1,\ (\mathrm{mod}\ n).$$

对于整数 u, v, n, Kloosterman 和定义为

(11) $$S(u,v,n)=\sum_r\exp\left[\frac{2\pi i}{n}(ur+vr')\right].$$

如 $(n, m)=1$，則

(12) $\quad S(u, v, n)\,S(u, w, m)=S(u, vm^2+w_{n^2}, nm).$

其应用参看 Kloosterman(1926), Atkinson(1948). 推廣見 A. Weil (1948), Salie (1931), D. H. Lehmer (1938), Whiteman (1945).

推廣 Gauss 和曾在許多方面加以推廣. 应用于二次型理論方面的推廣見 Siegel(1935, 1936, 1937, 1941.). Hardy 及 Littlewood 曾应用如下形式的表达式

(13) $$\sum_{r=0}^{n-1} \exp\left(\frac{2\pi i m}{n} r^k\right) \qquad (m, n)=1$$

其中 k 是 >2 的定数，來定义 Waring 問題的所謂"奇異級数"(卽將一整数表示为固定数目的 k 次方之和)；見 Hardy-Littlewood (1920, 1921, 1922 a. b, d, 1925). 这种著作通常标名为 Partitio Numerorum. 其他类型的三角和見 Vinogradow (Виноградов, 1939, 1940).

17-7. 黎曼 ζ-函数与質数的分布

設 s 为一复变数. 对于 $\operatorname{Re} s>1$, 黎曼 ζ 函数

(1) $$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

是 s 的解析函数. 欧拉曾証明

(2) $$\zeta(s)=\prod_{p}\left(1-p^{-s}\right)^{-1} \qquad \operatorname{Re} s>1$$

其中的積过所有的質数 $p=2, 3, 5, 7, \cdots$. 積分表示式

(3) $$\zeta(s)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty}\frac{x^{s-1}}{e^x-1}dx=-\frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i}\int_{\infty}^{(0+)}\frac{(-z)^{s-1}}{e^z-1}dz$$

表明 $\zeta(s)$ 可以解析开拓，到处單值而正則，但 $s=1$ 为例外，此处 $\zeta(s)$ 具有一單極，其上的留数为 1. 方程(3) 还給出了

(4) $$\zeta(0)=-\tfrac{1}{2},\ \zeta(-2m)=0,\ \zeta(1-2m)=-B_m/(2m)$$

其中 $m=1, 2, 3, \cdots$ 且 B_m 表 m 階 Bernoulli 数(見 1-13 節).

$\zeta(s)$ 在 $s=1$ 的隣域中的 Laurent 級数曾由 Stieltjes 給出。有

$$\zeta(s)=\frac{1}{s-1}+\gamma+\gamma_1(s-1)+\gamma_2(s-1)^2+\cdots$$

其中 γ 表 Euler 常数[見 1-1(4)]，对于 $k=1, 2, 3, \cdots$

$$\gamma_k=\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{v=1}^{n}\frac{(\log v)^k}{v}-\frac{1}{k+1}(\log n)^{k+1}\right\}$$

(見 Hardy, 1912)。

从(3)可得函数方程

(5) $\quad\zeta(s)=2^s\pi^{s-1}\sin\left(\frac{1}{2}\pi s\right)\Gamma(1-s)\zeta(1-s),$

(6) $\quad\zeta(1-s)=2^{1-s}\pi^{-s}\cos\left(\frac{1}{2}\pi s\right)\Gamma(s)\zeta(s).$

$\zeta(s)$ 在 $s=-2, -4, -6, \cdots$ 上的零点是唯有的实零点。

可以証明，$\zeta(s)$ 除了这些零点之外，在帶域 $0<\operatorname{Re} s<1$ 的外部不具有零点，但在这一帶域之內，則有無窮多个复零点 ρ，而且

(7) $\quad\zeta(s)=\dfrac{e^{bs}}{2(s-1)\Gamma\left(\frac{1}{2}s+1\right)}\prod_{\rho}\left[\left(1-\dfrac{s}{\rho}\right)e^{s/\rho}\right],$

其中乘積过所有复零点 ρ，且

(8) $\quad b=\log 2\pi-1-\frac{1}{2}\gamma.$

Euler 常数 γ 的定义見 1-1(4) 式。

如 h 为一正常数，$s=\sigma+it$，

$0\leqslant\sigma\leqslant1,\ 2\pi xy=|t|,\ x>h>0,\ y>h>0$

$\chi(s)=2^s\pi^{s-1}\sin\left(\frac{1}{2}\pi s\right)\Gamma(1-s)=\zeta(s)/\zeta(1-s),$

則

(9) $\quad\zeta(s)=\sum_{n<x}n^{-s}+\chi(s)\sum_{n<y}n^{s-1}+O(x^{-\sigma})+O\left(|t|^{\frac{1}{2}-\sigma}y^{\sigma-1}\right).$

这一方程称为 ζ-函数的近似函数方程。(9)式中的 O 項可換为系数为三角函数并以 $|t|^{-\frac{1}{2}}$ 的冪展开的漸近級数。見 Siegel (1931) 及 Titchmarsh (1935, 1951)。

函数

(10) $\quad\xi(s)=\frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-\frac{1}{2}s}\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)\zeta(s)$

滿足关系

(11) $\xi(1-s)=\xi(s)$,

并具有積分表示式

(12) $\xi(s)=\frac{1}{2}s(s-1)\int_0^\infty\left(\sum_{n=1}^\infty e^{-n^2\pi x}\right)x^{\frac{1}{2}s-1}dx.$

以

(13) $s=\frac{1}{2}+it,\ \xi(s)=\Xi(t)$,

方程(12)給出

(14) $\Xi(t)=\frac{1}{2}-(t^2+\frac{1}{4})\int_1^\infty\left(\sum_{n=1}^\infty e^{-n^2\pi x}\right)x^{-\frac{3}{4}}\cos(\frac{1}{2}t\log x)dx.$

与 $\zeta(s)$ 有关的其他結果見 1–12 節.

$\zeta(s)$ 的零点 Riemann 推测 $\zeta(s)$ 的所有复零点都具有实部 $\frac{1}{2}$[或 $\Xi(t)$ 只具有实零点]. Riemann 的假設自从發布以来,虽然得出了很多有关的知識,但到現在尙不能加以証明,也不能加以否定. 現在已經知道的是 Riemann 的假設在而且只有在

$$\sum_{n=1}^\infty \mu(n)n^{-s}, \qquad \text{Re}\, s>\tfrac{1}{2}$$

收歛的情形下正确. [关于 $\mu(n)$ 見 17–2, 17–3 節]

下面是关于 $\zeta(s)$ 零点的一些已知結果. 設 $s=\sigma+it$, 并設 $N_0(T)$ 为 $\zeta(s)$ 的零点中使 $\sigma=\frac{1}{2}$, $0<t<T$ 的那些零点的总数, $N(T)$ 是 $0<\sigma<1$, $0<t<T$ 的那些零点的总数, $N(\sigma', T)$ 为 $0<t<T$, $\sigma>\sigma'$ 的那些零点的总数. Selberg (1942) 曾証明,存在有一个常数 A, 使得对于充分大的 T, 有

(15) $N_0(T)>AT\log T.$

又当 $T\to\infty$ 时,有

(16) $2\pi N(T)=T\log T-(1+\log 2\pi)T+O(\log T)$,

(17) $N(\sigma, T)=O[T^{3(1-\sigma)/(2-\sigma)}(\log T)^5]$,

最后一式系由 Ingham (1940) 求得,对 $\frac{1}{2}<\sigma<1$ 中任一不变的 σ 成立. 取 σ 为 T 的函数,使 $\sigma-\frac{1}{2}$ 足夠小, Selberg (1946) 求

得了(17)式的一个改良式.

有关于許多支持 Riemann 假設的事实見 Titchmarsh (1935, 1936). 他应用近似函数方程(9)并以量的近似式來代替 O 項. 这使他能夠計算出 $\zeta(\sigma+it)$ 的零点,一直到 $t=1468$, 他求出了 $\sigma=\frac{1}{2}$ 綫上的全部零点,計 1041 个.

关于 $\zeta(s)$ 的值的分布方面,已經証明了很多定理,見 Titchmarsh (1930). 关于

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+a)^{-s}$$

的零点情形可參看 Davenport-Heilbronn (1936).

質数的分布 設 $\pi(x)$ 为不超过 x 的質数 p 的数目. 如 $x\to\infty$, 則

$$(18)\quad \pi(x)=\int_2^x\frac{du}{\log u}+O\{x\exp[-a(\log x)^{\frac{1}{2}}]\}$$

其中 a 为一正的絕对常数. 特别是

$$(19)\quad \lim_{x\to\infty}[x^{-1}\pi(x)\log x]=1,$$

这一結果称为質数定理. 函数

$$(20)\quad \pi(x)-\int_2^x\frac{du}{\log u}=P(x)$$

在 $x\to\infty$ 时將無窮次的改变其符号. 事实上,存在有一个常数 a, 对于 x, y 的某些任意大的值,使得下面二不等式成立:

$$(21)\quad P(x)>a\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\log x}\log\log\log x,$$

$$(22)\quad P(y)<-a\frac{y^{\frac{1}{2}}}{\log y}\log\log\log y.$$

不过,如 $x>10$, 对于現有的任何表的范圍, $P(x)<0$.

所有有关 $\pi(x)$ 的这些結果都可从有关于 $\zeta(s)$ 零点分布的定理中得到証明. 如果 Riemann 的假設是真实的,那么对于 $x\to\infty$,

$$(23)\quad P(x)=O(x^{\frac{1}{2}}\log x).$$

但目前还不能証明这一点．反之，如(23)可以証明，或者能証明对于任意的 $\varepsilon>0$，当 $x\to\infty$ 时 $P(x)=O(x^{1/4+\varepsilon})$，則 Riemann 的假設亦將得証．

Mills (1947) 証明有一实数 $A>1$ 存在，对于所有整数 $n\geqslant1$，使得 $[A^{3^n}]$ 是一質数，这可从 Ingham (1937) 的結果中推出，Ingham 的結果是：对于所有大的 x，在 x^3 及 $(x+1)^3$ 之間存在有一个質数．見 Niven (1951)．

推廣．Dedekind ζ-函数是代数数域中类似于 Riemann ζ-函数的函数；$\zeta(s)$ 可看作是有理数域中的 Dedekind ζ-函数 (Hasse, 1927, 1930; Brauer, 1947)．关于"特征 p 的域"及"單純代数"中的 ζ-函数的定义，可参看 F. K. Schmidt (1931), Hasse (1933), Deuring (1935), Eichler (1949)．Riemann ζ-函数的其他推廣是：Dirichlet L-級数及其推廣，P. Epstein ζ-函数，見 17–8 及 17–9 節．

17–8.　特征与 L-級数

設 $n>1$ 为一固定的正整数，m 为任一整数．考察滿足如下条件的函数 $\chi(m)$

(i)　$\chi(m)=\chi(m')$，　　如 $m\equiv m' \pmod n$，

(ii)　$\chi(1)=1$，

(iii)　$\chi(m)=0$，　　如 $(m,n)\neq1$，

(iv)　$\chi(m)\,\chi(m')=\chi(mm')$．

具有这四性質的函数称为**对模 n 之一特征**，或**特征** $(\bmod n)$．函数

$$(1)\qquad \chi_1(m)=\begin{cases}1 & \text{如 } (m,n)=1.\\ 0 & \text{如 } (m,n)\neq1.\end{cases}$$

称为**主特征** $(\bmod n)$．$\chi(m)$ 的值当且僅当 $(m,n)=1$ 时不等于零，因此其 $\phi(n)$ 次方等于 1．这里的 $\phi(n)$ 是 17–1 節的 Euler 函数．一个特征的所有值如果都是实数，則称为实特征．对模 n 的实特

征都是主特征，且都是 Legendre-Jacobi 符号$\left(\frac{m}{n}\right)$. 二特征之積 $\chi_a(m)\chi_b(m)$ 仍是一特征 (mod n). 精确地說，共存在有 $\phi(n)$ 个不同的特征 (mod n). 如以 h 表 $\phi(n)$, 并以 $\chi_1, \cdots, \chi_h$ 表 h 个不同的特征，则

$$(2)\qquad \sum_{m=1}^{n} \chi_\nu(m)\bar{\chi}_\mu(m) = \begin{cases} h & \text{如 } \nu=\mu \\ 0 & \text{如 } \nu\neq\mu \end{cases} \qquad \nu, \mu = 1, 2, \cdots, h$$

此处一划表示共軛复数値. 如 $(m, n)=1$, $(m', n)=1$, 則

$$(4)\qquad \sum_{\nu=1}^{h} \chi_\nu(m)\chi_\nu(m') = \begin{cases} h & \text{如 } mm'\equiv 1 \pmod n \\ 0 & \text{如 } mm'\not\equiv 1 \pmod n \end{cases}$$

在(2)中，如令 $\mu=1$, 則对主特征以外的所有特征，有

$$\sum_{m=1}^{n} \chi(m) = 0.$$

設 $n>1$ 为一固定的整数，χ 为对模 n 的一特征，則

$$(4)\qquad L(s, \chi) = \sum_{m=1}^{\infty} \chi(m) m^{-s} \qquad \operatorname{Re} s > 1,$$

称为 *L-級数*，系 Dirichlet 所引用. L-級数与 Riemann ζ-函数具有很多共同的性質. 类似于 Euler 乘積的一个公式是

$$(5)\qquad L(s, \chi) = \prod_{p} [1-\chi(p)p^{-s}]^{-1} \qquad \operatorname{Re} s > 1$$

此处的積过所有的質数 p. 如 χ_1 表主特征，則

$$(6)\qquad L(s, \chi_1) = \zeta(s) \prod_{p|n} (1-p^{-s})$$

此处的積过可以除尽 n 的有限数質数. 如 $\chi\neq\chi_1$, 則 $L(s, \chi)$ 是 s 的一个整函数，在 $s=1$ 上并不等于零.

設 χ 是对模 n 的一个特征. 假使对于 n 的某一固定除数 N $(N<n)$ 及所有满足如下条件的 m 与 m'

$$m\equiv m' \pmod N, \quad (m,n)=(m', n)=1$$

有

$$\chi(m)=\chi(m'),$$

則称特征 χ 为*非原特征* (mod n). 否則称 χ 为原特征 (mod n).

如 $n>1$，并令 $N=1$，那末对于 $(m,n)=(m',n)=1$，如果有 $\chi(m)=\chi(m')$，則 χ 將为非原特征 $(\mathrm{mod}\, n)$；因为 $(1,n)=1$，$\chi(1)=1$，这样的一个 χ 只能是主特征 $(\mathrm{mod}\, n)$。因此，对模 n 的主特征当且僅当 $n=1$ 时是原特征。

設 χ 为一原特征 $(\mathrm{mod}\, n)$。如 $\chi(-1)=1$，則 $L(s,\chi)$ 在 $s=0, -2, -4, \cdots$ 时等于零，如 $\chi(-1)=-1$，則在 $s=-1, -3, -5, \cdots$ 时等于零。如命

(7) $\quad \alpha=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\chi(-1)$,

則对于 $n>2$，及每一个原特征 χ，

(8) $\quad \xi(s,\chi)=\pi^{-\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}\alpha}n^{\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}\alpha}\Gamma(\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}\alpha)L(s,\chi)$

是一整解析函数，在帶 $0<\mathrm{Re}\, s<1$ 的外部不等于零。它具有一个类似于 17–7(7) 的無窮乘積表示式，并滿足函数方程：

(9) $\quad \xi(s,\chi)=\varepsilon(\chi)\,\xi(1-s,\chi)$

其中

(10) $\quad \varepsilon(\chi)=-in^{-\frac{1}{2}}\sum_{m=1}^{n}\chi(m)\cos(2m\pi/n)$.

可以証明 $|\varepsilon(\chi)|=1$.

L-級数在研究算術級数中質数的分布情况时很重要。

关于(5)及(9)之間的关系見 Hecke(1944)，Petersson(1948)。$\xi(s,\chi)$ 的零点性态与 $\zeta(s)$ 的零点性态相仿；它們的实部据推測(尚未得到証明)將恆为 $\frac{1}{2}$. $L(1,\chi)$ 的下界及其在数論中的应用見 Siegel(1935, 1943)，Page (1935)，Rosser (1949)。

L-級数曾由 Artin (1924, 1931, 1932) 加以推廣。普通 L 級数系数中所用的是与 n 互質的剩余类的積性羣的特征，Artin 所用的則是另外一些羣的特征。

17–9. 爱潑司丁 ζ-函数

設 p 为一正整数，并設

$g=(g_1,\cdots,g_p)$, $h=(h_1,\cdots,h_p)$, $m=(m_1,\cdots,m_p)$

为具有 p 个实分量 (m 的分量应是整数) 的矢量,

(1) $$(g, h) = \sum_{\nu=1}^{p} g_\nu h_\nu$$

为 g 与 h 的标積,其他矢量的标積也以同法标記. 設 $[\alpha_{\mu\nu}]$ 为一滿秩的 $p\times p$ 对称矩陣, $[\alpha^*_{\mu\nu}]$ 为逆矩陣,

(2) $$\phi(x) = \sum_{\mu=1}^{p} \sum_{\nu=1}^{p} \alpha_{\mu\nu} x_\mu x_\nu$$

是与 $[\alpha_{\mu\nu}]$ 連帶的二次型, $\phi^*(x)$ 是与 $[\alpha^*_{\mu\nu}]$ 連帶的二次型,并設 Δ 为 $\alpha_{\mu\nu}$ 的行列式. 我們假定 $\phi(x)$ 的实部为恆正. 再設 s 为一复变数.

与二次型 ϕ 連帶的 Epstein p 階 ζ-函数定义为

(3) $$Z\begin{vmatrix} g \\ h \end{vmatrix}(s)_\phi = Z\begin{vmatrix} g_1, \cdots, g_p \\ h_1, \cdots, h_p \end{vmatrix}(s)_\phi$$
$$= \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{m_p=-\infty}^{\infty}{}' [\phi(m+g)]^{-\frac{1}{2}ps} \exp[2\pi i\,(m, h)].$$

和号上的一撇表示和式过所有的整数 $m_1, \cdots, m_p$, 但如 g 的分量都是整数,項 $m=-g$ 应除去. 这一級数是絕对收斂的,并定义了 s 的一个函数,在半平面 $\mathrm{Re}\, s>1$ 上解析.

ζ-函数理論中的基本定理是下面的**函数方程**:

(4) $$\pi^{-\frac{1}{2}ps}\Gamma(\tfrac{1}{2}ps) Z\begin{vmatrix} g \\ h \end{vmatrix}(s)_\phi$$
$$= \Delta^{-\frac{1}{2}} \pi^{-\frac{1}{2}p(1-s)} \Gamma[\tfrac{1}{2}p(1-s)] e^{-2\pi i(g,h)} Z\begin{vmatrix} h \\ -g \end{vmatrix}(1-s)_{\phi^*}.$$

(3)式所定义的函数及其解析开拓是 s 的整函数,但在 h 的所有分量都是整数时为例外;在后一情形下 ζ-函数在 $s=1$ 上具有一單極,这一極上的留数为

(5) $$\pi^{\frac{1}{2}p}\Delta^{-\frac{1}{2}}/\Gamma(\tfrac{1}{2}p+1).$$

ζ-函数在

(6) $$s = -2k/p, \quad k=1, 2, 3 \cdots$$

上等于零. 它在 $s=0$ 上也等于零,但如 g 的所有分量都是整数

时，它在 $s=0$ 上的值为

(7) $\quad -\exp[-2\pi i\,(g,h)]$.

这些結果都是 P. Epstein (1903, 1907) 所提出. Epstein 还研究了一些特殊情形，例如，$p=1$ 或 $p=2$ 的情形，以及 g, h 的所有分量都等于零的情形等. 特别是，他确定了

(8) $$Z\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix}(s)_\phi=\frac{c}{s-1}+c_0+c_1(s+1)+\cdots$$

的 Laurent 展开式中的常数 c_0. 他还証明 Herglotz (1905) 的結果也可从他的公式中導出. Herglotz 曾研究过如下形式的和：

(9) $$\sum_{a=-\infty}^{\infty}\sum_{b=-\infty}^{\infty}{}' (a+ib)^n(a^2+b^2)^{-\frac{1}{2}n-s}$$

其中 $n=0, 2, 4, \cdots$. Siegel (1943) 曾研究过幷推廣了 Epstein 的 ζ-函数，幷証明了有关于該函数零点的若干定理.

17-10. 格点

x, y 平面上坐标都是整数的点称为格点. van der Corput (1919) 对于一定区域中的格点数立出了一条一般性定理，下面將举其一特例. 我們定义 x, y 平面上的区域 D 如下：設 $w-\frac{1}{2}$ 为一正整数，幷設 $f(x)$ 定义于区間 $\frac{1}{2}<x<w$ 上，幷在这一区間上具有正的連續的一階二階導数. 設

(1) $\quad f(\frac{1}{2})>2,\ 0<f'(x)<1,\ f''(x)>z^{-3}$,

其中 $z>1$ 不依賴于 x. 以 D 表閉区間

(2) $\quad \frac{1}{2}\leqslant x\leqslant w,\ \frac{1}{2}\leqslant y\leqslant f(x)$,

幷記其面積为

(3) $$A(D)=\int_{\frac{1}{2}}^{w}[f(x)-\tfrac{1}{2}]\,dx$$

設 D 中的格点总数为 $L(D)$. van der Corput 定理說明

(4) $\quad |L(D)-A(D)|<cz^2$

其中 c 为一常数. Jarnik (1936) 曾証明，对于某一曲綫 $f(x)$，(4)

式右側的指数 2 不能被任何更小的指数代替,所以是最优可能的指数.

在特殊曲綫所圍成的区域,特别是圓所圍成的区域中,曾求得了更为詳細的結果. 設 $A(u)$ 为閉区域

(5) $x^2+y^2\leqslant u$

内的格点数. 应用 17-3 節的記法,可有

(6) $$A(u)=\sum_{n\leqslant u^{1/2}} r_2(n).$$

設 $J_1(z)$ 为一階第一类貝塞尔函数(見 7-2-1 節). Hardy 曾証明,对于所有的 $u>0$

(7) $$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\tfrac{1}{2}A(u+\varepsilon)+\tfrac{1}{2}A(u-\varepsilon)\right]$$
$$=\pi u+u^{1/2}\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2} r_2(n) J_1[2\pi(nu)^{1/2}].$$

如 u 不为整数,則 (7) 式的左側即等于 $A(u)$. 可以証明

$$A(u)-\pi u=O(u^{\nu})$$

对每一个 $\nu\geqslant\frac{1}{3}$ 正确,而对任一 $\nu\leqslant\frac{1}{4}$ 不成立.

在格点理論中,有很多著作,特别是,在一橢球内的格点数曾由 van der Corput 研究过.

17-11. 貝塞尔函数恒等式

在各种数函数的估值研究中,得出了許多包含 Bessel 函数的恒等式.上面我們已經提到过如下二个公式:

(1) $$\sum_{n<x}{}' r_2(n)=\pi x+x^{1/2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r_2(n)}{n^{1/2}} J_1[2\pi(nx)^{1/2}]$$

(2) $$\sum_{n<x}{}' r(n)=x^6\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r(n)}{n^6} J_{12}[4\pi(nx)^{1/2}].$$

另外的例子如

(3) $$\sum_{n<x}{}'\frac{\sigma(n)}{n}=\frac{\pi^2 x}{6}-\tfrac{1}{2}(\gamma+\log 2\pi x)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma(n)}{n} J_0[4\pi(nx)^{1/2}],$$

(4) $$\sum_{n\leq x}{}' d(n) = x\log x + (2\gamma - 1)x + \tfrac{1}{4}$$
$$- x^{\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1}{2}} d(n) \{ Y_1[4\pi(nx)^{\frac{1}{2}}] + 2\pi^{-1} K_1[4\pi(nx)^{\frac{1}{2}}] \}.$$

此处 γ 为 Euler 常数，和号上的一撇表示 x 为整数时，和的最后一項应乘以 $\frac{1}{2}$. 在以右边的初等函数向左侧逼近中，所產生誤差的恰当表达式即可以 Bessel 函数的無窮級数來表示.

Voronoi (1904) 提出了 (1) 式，但沒有証明，第一个加以嚴格証明的是 Hardy (1915). 公式 (3) 是 Wigert (1917) 所提出，公式 (4) 是 Voronoi (1904) 所提出.

这些恆等式的收斂性問題可因它們的"積分形式"而不作精密的研究，其左側可寫成

$$\sum_{n\leq x} a(n)(x-n)^q/q!$$

Oppenheim (1926) 給出了一个普通的方法，用以可導出上列的大部分公式以及若干更一般的恆等式，并在發散的情形下，用無窮級数的 Riesz 均値討論了它們的可和性. Apostol (1951) 对 Landau (1915) 定理作了簡單的証明，这一定理說明：一般的恆等式

(5) $$\frac{1}{q!}\sum_{n=0}^{x} a(n)(x-n)^q = \rho\frac{\Gamma(k)}{\Gamma(k+q+1)}x^{k+q}$$
$$+ \gamma\frac{x^{\frac{1}{2}(q+k)}}{(2\pi/\lambda)^q}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(n)}{n^{\frac{1}{2}(k+q)}} J_{k+q}\left[\frac{4\pi}{\lambda}(nx)^{\frac{1}{2}}\right]$$

在数 $a(n)$ 是 Dirichlet 級数

$$\phi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) n^{-s}$$

的系数时成立，这一級数在 $\operatorname{Re} s > k$ 时絕对收斂，对所有的 s 正則，但在可能的極 $s=k$ 上为例外，这一極上的留数为 ρ，并具有函数方程

$$\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^s \Gamma(s)\phi(s) = \gamma\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{k-s}\Gamma(k-s)\phi(k-s).$$

这种 Dirichlet 級数曾由 Hecke (1938) 作过詳細研究. 系数 $a(n)$ 的可用例子如 Ramanujan 函数 $\tau(n)$ 及 17–3 節的函数 $r_k(n)$. (5) 式右側的 Bessel 函数級数在 $q>k-\frac{1}{2}$ 时絕对收斂, 但在特殊情形下, 它对 q 的較小值也可收斂.

Hardy (1940) 求得了不同类型的一个恆等式,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) e^{-4\pi s n^{1/2}} = 2^{1/2} s \pi^{-25/2} \Gamma\left(\frac{25}{2}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{(s^2+n)^{25/2}}$$

可以証明, 上式是 Bessel 函数恆等式

$$2 \sum_{n=0}^{\infty} a(n) K_\nu(4\pi s n^{1/2}) n^{-1/2\nu} = (2\pi)^{\nu-k} s^{-\nu} \Gamma(k-\nu) \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(n)}{(s^2+n)^{k-\nu}}$$

的一个特殊情形, 其中 $a(n)$ 滿足 (5) 中的同样条件.

有关于"求和公式"的相应結果見 Ferrar (1935, 1937).

参 考 文 献

Alder, H. L., 1948: *Bull. Amer. Math. Soc.* 54, 712–722.

Apostol. T. M., 1951: *Duke Math. J.* 18 517–525.

Artin. Emil, 1924: *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* 3, 89–108.

Artin, Emil, 1931: *J. Reine Angew. Math.* 164, 1–11.

Artin, Emil, 1931: *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* 8, 292–315.

Atkinson, F. V., 1939: *J. London Math. Soc.* 14, 175–184.

Atkinson, F. V., 1941: *Proc. London Math. Soc.* (2) 47, 174–200.

Atkinson, F. V., 1948: *J. London Math. Soc.* 23, 128–135.

Baker, H. F., 1889: *Proc. London Math. Soc.* 21, 30–32.

Bambah, R. D. and S. D. Chowla, 1947: *J. London Math. Soc.* 22, 140–147.

Bell, E. T., 1926: *Amer. Math. Monthly* 33, 206–210.

Bell, E. T., 1931: *Bull. Amer. Math. Soc.* 37, 251–253.

Bellmann, Richard and H. N. Shapiro, 1948: *Duke Math. J.* 15, 229–235.

Bellmann, Richard, 1950: *Duke Math. J.* 17, 159–168.

Blij, Frederik, van der, 1948: *Math. Centrum Amsterdam, Rapport. ZW*, 1948-010, *pp.* 18.

Bohr, Harald and Harald Cramér, 1922: *Enzykl. Math. Wiss.* IIc 8, 815–826.

Brauer, Richard, 1926: *Jber. Deutsch. Math. Verein.* 35, 94–96.

Brauer, Richard, 1947: *Amer. J. Math.* 69, 243–250.

Brigham, N. A., 1950: *Proc. Amer. Math. Soc.* 1, 182–191.

Carmichael, R. D., 1932: *Proc. London Math. Soc.* (2) 34, 1–26.

Cesáro, Ernesto, 1887: *Giorn. di Mat.* 25, 14–19.

Chowla, S. D., 1928: *J. Indian Math. Soc.* 17, 153–163.

Chowla, S. D., 1945: *Proc. Lahore Philos. Soc.*, 7 pages.

Chowla, S. D., 1947: *Proc. Nat. Inst. Sci. India* 13, No' 4, 1 page.

Chowla, S. D., 1949: *Proc. Nat. Acad. Sci. India* 35, 244–246.

Corput, J. G., van der, 1919: *Diss. Leiden*, 128 p., Noordhoff, Groningen.

Corput, J. G., van der, 1920: *Math. Ann.* 81, 1 20.

Darling, H. B. C. 1921: *Proc. London Math. Soc.* (2) 19, 350–375.

Davenport, Harold, 1932: *J. London Math. Soc.* 7, 290–298.

Davenport, Harold, and Hans Heilbronn, 1936: *J. London Math. Soc.* 11, 181–185.

Deuring, Max, 1935: *Algebren. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete* Vol. 4, Springer, Berlin.

Dickson, L. E., 1919: *History of the theory of numbers* (3 vols.) vol. I, Washington.

Dickson, L. E., 1939: *History of the theory of numbers*, vol. II, New York.

Eichler, Martin, 1949: *Ann. of Math.* 50, 816 826.

Eisenstein, Gotthold, 1847: *J. Reine Angew. Math.* 35, 368.

Eisenstein, Gotthold, 1850: *J. Reine Angew. Math.* 39, 180–182.

Epstein, Paul, 1903: *Math. Ann.* 56, 615 644.

Epstein, Paul, 1907: *Math. Ann.* 63, 205–216.

Erdös, Paul and Aurel Wintner, 1939: *Amer. J. Math.* 61, 713–721.

Estermann, Theodor, 1928: *Proc. London Math. Soc.* (2) 29, 453–478.

Ferrar, W. L., 1935: *Compositio Math.* 1, 344–360.

Ferrar, W. L., 1937: *Compositio Math.* 4, 394–405.

Gegenbauer, Leopold, 1893: *Akad. Wiss. Wien. S.-B.* IIa 102, Part 2, 951–976.

Glaisher, J. W. L., 1907: *Proc. London Math. Soc.* (2) 5, 479–490.

Gronwall, T. H., 1913: *Trans. Amer. Math. Soc.* 14, 113–122.

Hardy, G. H., 1912: *Quart. J. Math.* 43, 215–216.

Hardy, G. H.. 1918: *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* 4, 189–193.

Hardy, G. H., 1920: *Trans. Amer. Math. Soc.* 21, 255–289.
Hardy, G. H., 1927: *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 23, 675–680.
Hardy, G. H., 1940: *Ramanujan*, Cambridge.
Hardy, G. H. and J. E. Littlewood, 1920: *Nachr. Ges. Wiss Göttingen*, 33–54.
Hardy, G. H. and J. E. Littlewood, 1921: *Math. Z.* 9, 14–27.
Hardy, G. H. and J. E. Littlewood, 1922 a: *Acta Math.* 44, 1–70.
Hardy, G. H. and J. E. Littlewood, 1922 b: *Math. Z.* 12, 161–188.
Hardy, G. H. and J. E. Littlewood, 1922 c: *Proc. London Math. Soc.* (2) 22, 46–56.
Hardy, G. H. and J. E. Littlewood, 1925: *Math. Z.* 23, 1–37.
Hardy, G. H. and Srinivasa Ramanujan, 1916: *Proc. London Math. Soc.* (2) 16, 112–132.
Hardy, G. H. and Srinivasa Ramanujan, 1918: *Proc. London Math. Soc.* (2) 17, 75–115.
Hardy, G. H. and E. M. Wright, 1938, 1945: *An introduction to the theory of numbers*, first and second editions, Oxford.
Hasse, Helmut, 1926: *Jber. Deutsche Math. Verein.* 35, 1–55.
Hasse, Helmut, 1927: *Jber. Deutsche Math. Verein.* 36, 233–311.
Hasse, Helmut, 1930: *Jber. Deutsche Math. Verein Erganzunngsband* 6, 22–34.
Hasse, Helmut, 1933: *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl.* 253–262.
Hecke, Erich, 1938: *Dirichlet Series* Institute for Advanced Study, Princeton.
Hecke, Erich, 1944: *Math. Ann.* 119, 226–287.
Herglotz, Gustav, 1905: *Math. Ann.* 61, 551–560.
Heilbronn: Hans 1937: *Acta Arith.* 2, 212–218.
Hölder, Otto, 1936: *Prace Mat.-Fiz.* 43, 13–23.
Hurwitz, Adolf and Richard Courant, 1929: *Allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen*, Part II, sections 11, 13 Springer, Berlin.
Husimi, Kôdi, 1938: *Proc. Phys.-Math. Soc. Japan* (3) 20, 912–925.
Ingham, A. E., 1932: *The distribution of prime numbers*, Cambridge.
Ingham, A. E., 1937: *Quart. J. Math. Oxford Ser.* 8, 255–266.
Ingham, A. E., 1940: *Quart. J. Math. Oxford Ser.* 11, 291–292.
Jacobsthal, Ernst, 1907: *J. Reine Angew. Math.* 132, 238–245.
Jarnik, Vojtěch, 1926: *Math. Z.* 24, 500–518.

Jordan, Camille, 1870: *Traité des Substitutions*, Gauthier-Villars, Paris.

Kac, Marc, E. R. van Kampen and Aurel Wintner, 1940: *Amer. J. Math.* 62, 107-114. 613-626.

Kienast, Alfred, 1926: *Proc London Math. Soc.* (2) 25, 45-52.

Kloosterman, H. D., 1926: *Acta Math.* 49, 407-464.

Knopp, Konrad and Issai Schur, 1925: *Math. Z.* 24, 559-574.

Landau, Edmund, 1909: *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen* (2 vols.) B. G. Teubner, Leipzig.

Landau, Edmund, 1915: *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen. Math.-Phys. Kl.* 209-243.

Landau, Edmund, 1927: *Vorlesungen über Zahlentheorie* (3 vols.) S. Hirzel, Leipzig.

Lehmer, D. H., 1931: *Amer. J. Math.* 53, 843-854.

Lehmer, D. H., 1936: *J. London Math. Soc.* 11, 114-118.

Lehmer, D. H., 1937: *J. London Math. Soc.* 12, 171-176.

Lehmer, D. H., 1938: *Trans. Amer. Math. Soc.* 43, 271-295.

Lehmer, D. H., 1946: *Bull. Amer. Math. Soc.* 52, 538-544.

Lehmer, Emma, 1948: *Bull. Amer. Math. Soc.* 55, 62.

MacMahon, P. A., 1915-1916: *Combinatory Analysis*,(2 vols.) Cambridge.

MacMahon, P. A., 1926: *Proc. London Math. Soc.* (2) 25, 469-483.

Maass, Hans, 1949: S.-B. *Heidelberger Akad. Wiss.* No. 1, 42 pp.

Mills, W. H., 1947: *Bull. Amer. Math. Soc* 53, 604, 1196.

Minkowski, Hermann, 1911: *Gesammelte Abhandlungen*, vol I, 118-119, 133-134, B. G. Teubner, Leipzig.

Mordell, L. J. 1917: *Quart. J. Math.* 48, 93-104.

Mordell L. J., 1919 a: *Trans. Cambridge Philos. Soc.* 22, 361-372.

Mordell, L. J., 1919 b: *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 19, 117-124.

Mordell, L. J., 1922: *Proc. London Math. Soc.* 20, 408-416.

Mordell, L. J., 1931: *Proc. London Math. Soc.* (2) 32, 501-556.

Niven, Ivan, 1940: *Amer. J. Math.* 62, 353-364.

Niven, Ivan, 1951: *Proc. Amer. Math. Soc.* 2, 753.

Oppenheim, Alexander, 1926: *Proc. London Math. Soc.* (2) 26, 295-350.

Page, Arthur, 1935: *Proc. London Math. Soc.* (2) 39, 116-141.

Petersson, Hans, 1948: *Acta Math.* 80, 191-221.

Rademacher, Hans, 1937 a: *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* 23, 78-84.

Rademacher, Hans, 1937 b: *Proc. London Math. Soc.* (2) 43, 241-254.

Rademacher, Hans, 1940: *Bull. Amer. Math. Soc.* 46, 59-73.

Rademacher, Hans, 1943: *Ann. of. Math.* 44, 416-422.

Rademacher, Hans, and H. S. Zuckerman, 1939: *Ann. of Math.* (2) 40, 473-489.

Ramanujan, Srinivasa, 1915: *Proc. London Math. Soc.* (2) 14, 347-409.

Ramanujan, Srinivasa, 1916: *Trans. Cambridge Philos. Soc.* 22, 159-184.

Ramanujan, Srinivasa, 1918: *Trans. Cambridge Philos. Soc.* 22, No. 13, 259-276. (collected papers pp. 179-199).

Ramanujan, Srinivasa, 1919: *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 19, 207-210.

Ramanujan, Srinivasa, 1921: *Math. Z.* 9, 147-153.

Ramanujan. Srinivasa, 1927: *Collected mathematical papers*, Cambridge.

Rankin, R. A., 1939: *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 35, 351-372.

Rogers, L. J., and Srinivasa Ramanujan, 1919, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 19, 211-216.

Rosser, J. B., 1949: *Bull. Amer. Math. Soc.* 55. 906-913.

Salié, Hans, 1931: *Math. Z.* 34, 91-109.

Schmidt, F. K., 1931: *Math. Z.* 33, 1-32.

Schoenberg, I. J., 1937: *Trans. Amer. Math. Soc.* 39, 315-330.

Schrutka, Lothar Freiherr von, 1911: *J. Reine Angew. Math.* 140, 252-265.

Schur, Issai, 1926: *S.-B. Preuss. Akad. Wiss.* 488-495.

Selberg, Atle, 1942: *Skr. Norske Vid. Akad. Oslo I.* No. 10, 1-59.

Selberg, Atle, 1946: *Arch. Math. Naturvid. B.* 48, No. 5.

Sengupta, H. M., 1948: *Math. Student* 15, 9-10.

Shapiro, H. N., 1950: *Ann. of Math.* 52, 217-230.

Siegel, C. L., 1923: *Math. Ann.* 88, 184-210.

Siegel, C. L., 1931: *Quell. Gesch. Math.* B2, 45-80.

Siegel, C. L., 1935: *Acta Arith.* 1, 83-86.

Siegel, C. L., 1935 a: *Ann. of Math.* (2) 36, 527-606.

Siegel, C. L., 1936: *Ann. of Math.* (2) 37, 230-263.

Siegel, C. L., 1937: *Ann. of Math.* (2) 38, 212-291.

Siegel, C. L., 1941: *Amer. J. Math.* 63, 658-680.

Siegel, C. L., 1943: *Ann. of Math.* (2) 44, 143-172.

Smith, H. J. S., 1867: *Proc. Roy. Soc. London* 16, 207 (Collected papers I, 1894, p. 521).

Stanley, G. K., 1927: *J. London Math. Soc.* 2, 91-96.

Stanley, G. K., 1928: *J. London Math. Soc.* 3, 232-237.

Titchmarsh, E. C., 1930: *The zeta function of Riemann*, Cambridge.

Titchmarsh, E. C., 1931: *Proc. London Math. Soc*, (2) 32, 488-500.

Titchmarsh, E. C., 1935: *Proc. Roy. Soc. London A* 151, 234–256.
Titchmarsh, E. C., 1936: *Proc. Roy. Soc. London A* 157, 261–264.
Titchmarsh, E. C., 1938: *Quart. J. Math. Oxford Ser.* 9, 216–220.
Titchmarsh, E. C., 1951: *The theory of the Riemann zeta function*, Oxford.
Tricomi, Francesco, 1928: *Boll. Un. Mat. Ital.* 7, 243–245.
Vaidyanathaswamy, R., 1930: *Bull. Amer. Math. Soc.* 36, 762–772.
Vaidyanathaswamy, R., 1931: *Trans. Amer. Math. Soc.* 33, 579–662
Vinogradow, I. M., 1939: *Izvestiya Akad. Nauk. SSSR Ser. Mat.* 371–389 (see Math. Reviews 1941, 2, p. 40).
Vinogradow, I. M., 1946: *C. R., (Doklady) Acad. Sci. URSS* (N. S.) 51, 491–492.
Voronoi, Georges, 1904: *Ann. Ec. Norm.* (3) 21, 207–268, 459–534.
Walfisz, A., 1938: *Trans Inst. Math. Tbillissi* 5, 145–152.
Watson, G. N, 1935: *Math. Z.* 39, 712–731.
Watson, G. N., 1938: *J. Reine Angew. Math.* 179, 97–123.
Weil, André, 1948: *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* 34, No. 5, 204–207.
Whiteman, A. L., 1945: *Bull. Amer. Math. Soc.* 51, 373–377.
Whiteman, A. L., 1949: *Duke Math. J.* 16, 619–626.
Whiteman, A. L., 1952: *Amer. J. Math.* 74, 89–99.
Wigert, S., 1917: *Acta Math.* 41, 197–218.
Wilton, J. R., 1929: *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 25, 121–129.
Wintner, Aurel, 1941: *Amer. J. Math.* 63, 619–627.
Wintner, Aurel, 1942: *Amer. J. Math.* 64, 106–114.
Wintner, Aurel, 1946: *Duke Math. J.* 13, 185–193.
Wright, E. M., 1931: *Quart. J. Math. Oxford Ser.* 2, 177–189.
Wright, E. M., 1931 a: *Proc. London Math. Soc.* (2) 36, 117–141.

第十八章　各种函数

18-1．米塔格-李弗勒函数 $E_\alpha(z)$ 及有关函数

函数

$$(1)\qquad E_\alpha(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)}$$

是由 Mittag-Leffler (1903, 1904, 1905) 所引進，并由若干作者研究过，就中有 Wiman (1905), Pollard (1948), Humbert (1953). 在这一章里，我們將以 E 表示函数 (1)，应与 9-3 節中所提到的不完全 γ-函数的物理上記法不能混淆.

$E_\alpha(z)$, $\alpha>0$ 是任一給定有限階的整函数的重要例子；在某种意义上，每一 $E_\alpha(z)$ 是其階的最簡單整函数 (Phragmén, 1904). Mittag-Leffler 函数也是有限階整函数其他性質研究中的例子，具有很多应用 (Buhl, 1925).

$$(2)\qquad E_1(z)=e^z,\ E_2(z^2)=\operatorname{ch} z,\ E_{\frac{1}{2}}(z^{\frac{1}{2}})=2\pi^{-\frac{1}{2}}e^{-z}\operatorname{Erfc}(-z^{\frac{1}{2}}),$$

正整数 n 的 $E_n(z^n)$ 是一廣义双曲綫函数（見 18-2 節）.

$E_\alpha(z)$ 的許多重要性質可从 Mittag-Laffler 積分表示式

$$(3)\qquad E_\alpha(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{t^{\alpha-1}e^t}{t^\alpha-z}dt$$

中推出，此处積分路徑 C 是起迄于 $-\infty$ 的一条圍綫，在正方向內圍繞圓盤 $|t|\leqslant|z|^{\frac{1}{\alpha}}$；在 C 上，$-\pi\leqslant\arg t\leqslant\pi$. 要証明 (3)，可將被積函数展为 z 的冪級数，逐項積分，并对 γ-函数的倒数应用 Hankel 積分式 1-6 (2) 卽得.

(3) 式的被積函数在 $t=0$ 上具有一支点. 复数 t 平面沿負实軸剖割，在剖割平面上，被積函数是單値的；t^α 的主枝取在剖割平面上. 被積函数的極在点

(4) $t_m = z^{1/\alpha} e^{2\pi i m/\alpha}$ m 整数,

但只有

(5) $-\alpha\pi < \arg z + 2\pi m < \alpha\pi$

的極在剖割平面上,因此,在 C 內部的極的数目將为$[\alpha]$或$[\alpha+1]$,根据 $\arg z$ 的值而定.

Feller 推測并由 Pollard (1948) 証明:对于 $x \geqslant 0$, 如 $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, 則 $E_\alpha(-x)$ 是完全單調的,也就是說

(6) $$(-1)^n \frac{d^n E_\alpha(-x)}{dx^n} \geqslant 0 \qquad x \geqslant 0,\ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1.$$

其証明可以 (3) 作为根据.

要研究 $E_\alpha(z)$ 在 $z \to \infty$ 时的漸近性态,可先設 z 沿扇形 $|\arg z| \leqslant \alpha\pi/2$ 外部的一条射綫 (如 $0 < \alpha < 2$, 这样的射綫是有的) $\to \infty$. 如果有任何極 t_m 满足 (5),則应在半平面 $\mathrm{Re}\, t < 0$ 上. 將 C 变形,使之由半平面 $\mathrm{Re}\, t < 0$ 上的二射綫組成,使任何的極都位于 C 之左側,并在 (3) 中令

$$\frac{t^\alpha}{t^\alpha - z} = -\sum_{n=1}^{N-1} \frac{t^{n\alpha}}{z^n} - \left(1 - \frac{t^\alpha}{z}\right)^{-1} \frac{t^{N\alpha}}{z^N},$$

并注意如 $\arg z$ 不变而 t 在 C 上,則 $(1 - t^\alpha z^{-1})^{-1}$ 將关于 $|z|$ 及 t 一致有界. 再应用 1-6 (2), 得

(7) $$E_\alpha(z) = -\sum_{n=1}^{N-1} \frac{z^{-n}}{\Gamma(1 - \alpha n)} + O(|z|^{-N}),$$

$$z \to \infty,\ |\arg(-z)| < (1 - \tfrac{1}{2}\alpha)\pi.$$

如 $|\arg(-z)| \leqslant (1 - \frac{1}{2}\alpha - \varepsilon)\pi$, $\varepsilon > 0$, 則 O 項將关于 $\arg z$ 一致. 这一結果在 $\alpha \geqslant 2$ 时無意义.

其次設 z 沿 $|\arg z| \leqslant \alpha\pi/2$ 的一条射綫 $\to \infty$. 則至少应有一个 t_m 滿足条件

(8) $-\frac{1}{2}\alpha\pi \leqslant \arg z + 2\pi m \leqslant \frac{1}{2}\alpha\pi$,

如 $\alpha \geqslant 2$, 則这样的 t_m 將有几个;这些極位于半平面 $\mathrm{Re}\, t \geqslant 0$ 上.

C 仍可像前一样变形,不过在 C 的变形过程中,满足(8)的極被通过,因而具有留数. 于是結果为

(9) $$E_\alpha(z)=\frac{1}{\alpha}\sum_m e^{t_m}-\sum_{n=1}^{N-1}\frac{z^{-n}}{\Gamma(1-\alpha n)}+O(|z|^{-N}),$$

$$z\to\infty,\ |\arg z|\leqslant \tfrac{1}{2}\alpha\pi,$$

其中 t_m 見(4),和式过满足(8)的所有整数 m. 特别是,如 $0<\alpha<2$, $m=0$ 是唯一满足(8)的整数,因此

(10) $$E_\alpha(z)=\frac{1}{\alpha}\exp z^{1/\alpha}+O(|z|^{-1}),$$

$$0<\alpha<2,\ |\arg z|\leqslant\tfrac{1}{2}\alpha\pi,\ z\to\infty.$$

从(7),(9),(10)及整函数的階的定义(見 Copson, 1935, 7–4 節)可知 $E_\alpha(z)$ 在 $\alpha>0$ 时是 $1/\alpha$ 階整函数. 漸近展开式(7).(9)由 Wiman (1905) 推廣到 α 的复数值.

Wiman (1905) 研究了 $E_\alpha(z)$ 的零点. 如 $\alpha\geqslant 2$, Wiman 証明 $E_\alpha(z)$ 在負实軸上具有無窮数个零点,此外别無零点. 如 $n(r)$ 为 $E_\alpha(z)$ 在 $|z|<r$ 上的零点数, Wiman 証明

(11) $$\left[\frac{r^{1/\alpha}}{\pi}\sin\frac{\pi}{\alpha}\right]\leqslant n(r)<\left[\frac{r^{1/\alpha}}{\pi}\sin\frac{\pi}{\alpha}\right]+1,\qquad \alpha\geqslant 2.$$

此处 $[x]$ 代表 $\leqslant x$ 的最大整数. 如 $0<\alpha<2$, 則零点的分布完全不同. 不計 $\alpha=1$ 的情形(此时無零点), Wiman 証明零点漸近地位于曲綫

(12) $$\operatorname{Re} z^{1/\alpha}+\log|z|+\log|\Gamma(-\alpha)|=0$$

上,而且

(13) $$[\pi^{-1}r^{1/\alpha}-\tfrac{1}{2}\alpha]-1\leqslant n(r)\leqslant[\pi^{-1}r^{1/\alpha}-\tfrac{1}{2}\alpha]+1$$

$$0<\alpha<2,\ \alpha\neq 1.$$

此外,如 $1<\alpha<2$, 則有奇数个負零点. Wiman 还研究了 α 复数值下的 $E_\alpha(z)$ 的零点情况.

函数方程

(14) $$\sum_{h=0}^{m-1}E_\alpha(ze^{2\pi ih/m})=mE_{m\alpha}(z^m),$$

(15) $$\left(\frac{d}{dz}\right)^m E_m(z^m) = E_m(z^m),$$

(16) $$\left(\frac{d}{dz}\right)^m E_{m/n}(z^{m/n}) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{z^{-km/n}}{\Gamma(1-km/n)} + E_{m/n}(z^{m/n})$$

是 (1) 的直接推論,此处 m 及 $n-1$ 都是正整数. 从 (16) 可得

$$\frac{d}{dz}[e^{-z}E_{1/n}(z^{1/n})] = e^{-z}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{z^{-k/n}}{\Gamma(1-k/n)},$$

应用 9-1(1), 將上式積分,得

(17) $$E_{1/n}(z^{1/n}) = e^z\left[1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\gamma(1-k/n, z)}{\Gamma(1-k/n)}\right], \qquad n=2, 3, \cdots.$$

$E_{m/n}$ 的顯表达式可从 (14) 及 (17) 推出. 如 $n=2$, 从 (17) 应用 9-9 (1), (2) 即得 (2) 的第二个方程.

積分

(18) $$\int_0^\infty e^{-t}E_\alpha(t^\alpha z)\,dt = \frac{1}{1-z}, \qquad \alpha\geqslant 0,$$

曾由 Mittag-Leffler 加以研究,并証明 (18) 的收斂区域包括單位圓,并以直綫 $\mathrm{Re}\, z^{1/\alpha}=1$ 为境界. $E_\alpha(t^\alpha)$ 的 Laplace 变换可从(18)式推得, Humbert 用以求得了 $E_\alpha(z)$ 所满足的許多函数关系.

函数

(19) $$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}, \qquad \alpha, \beta>0$$

具有極似于 Mittag-Leffler 函数的性質,見 Wiman(1905), Agarwal (1953), Humbert-Agarwal(1953). 下述公式可很精确地求得,正像上面它們的特殊情形 $\beta=1$ 一样.

(20) $$E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{t^{\alpha-\beta}e^t}{t^\alpha - z}\,dt.$$

(21) $$E_{\alpha,\beta}(z) = -\sum_{n=1}^{N-1}\frac{z^{-n}}{\Gamma(\beta-\alpha n)} + O(|z|^{-N}),$$

$$z\to\infty, \quad |\arg(-z)| < (1-\tfrac{1}{2}\alpha)\pi.$$

(22) $$E_{\alpha,\beta}(z)=\frac{1}{\alpha}\sum_{m}t_m^{1-\beta}e^{t_m}-\sum_{n=1}^{N-1}\frac{z^{-n}}{\Gamma(\beta-\alpha n)}+O(|z|^{-N}),$$

$$z\to\infty,\quad |\arg(z)|\leqslant\tfrac{1}{2}\alpha\pi.$$

(23) $$E_{\alpha,1}(z)=E_\alpha(z),$$

$$E_{\alpha,\beta}(z)=\frac{1}{\Gamma(\beta)}+zE_{\alpha,\alpha+\beta}(z).$$

(24) $$\sum_{h=0}^{m-1}E_{\alpha,\beta}(ze^{2\pi ih/m})=mE_{m\alpha,\beta}(z^m).$$

(25) $$\left(\frac{d}{dz}\right)^m[z^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(z^\alpha)]=z^{\beta-m-1}E_{\alpha,\beta-m}(z^\alpha).$$

(26) $$\int_0^\infty e^{-t}t^{\beta-1}E_\alpha(t^\alpha z)\,dt=\frac{1}{1-z},\qquad \alpha,\ \beta>0.$$

(20) 式中 C 同 (3), (22) 中的 t_m 見 (4), m 取滿足 (8) 的所有整数值. 在 (24) 及 (25) 中, m 为任一正整数. (26) 的收斂区域同 (18). $t^{\beta-1}E_\alpha(t^\alpha)$ 的 Laplace 变换可用(26)式計算,曾由 Agarwal (1953) 及 Humbert-Agarwal (1953) 用以求得 $E_{\alpha,\beta}$ 的其他性質.

Humbert-Delerue (1953) 曾簡略地討論过类似于 $E_{\alpha,\beta}$ 的一个二变数函数.

函数 E_α 及 $E_{\alpha,\beta}$ 在角为 $\alpha\pi$ 的某一扇形内随 $z\to\infty$ 而無限增大,在这扇形外部,随 $z\to\infty$ 而趋于零. 关于在一个方向内無限增大而在所有其他方向内趋于 0 的整函数,现在也已有所知,下面就是这种函数的二个例子:

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma[1+k(\log k)^{-\alpha}]},\qquad 0<\alpha<1,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{z}{\log(k+1/\alpha)}\right]^k,\qquad 0<\alpha<1.$$

这二函数分别由 Malmquist (1905) 及 Lindelöf (1903) 討論过.

Barnes (1906) 研究过 $E_\alpha(z)$ 及若干类似函数的漸近性态,就中特别是函数

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{(k+\theta)^{\beta}\Gamma(1+\alpha k)},\quad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k\Gamma(1+\alpha k)}{k!},$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k\Gamma(1+\alpha k)}{\Gamma(1+\alpha+\alpha k)}.$$

与 $E_{\alpha,\beta}$ 密切相关的一个函数是整函数

$$(27)\quad \phi(\alpha,\beta;z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!\,\Gamma(\alpha k+\beta)},\qquad \alpha,\beta>0.$$

这一函数由 Wright (1934) 应用在分拆的漸近理論中，它与 $E_{\alpha,\beta}$ 的关系为

$$(28)\quad \int_0^{\infty}e^{-ts}\phi(\alpha,\beta;t)\,dt=s^{-1}E_{\alpha,\beta}(s^{-1}),\qquad \alpha>1,\ \beta>0.$$

$\phi(z)$ 可以下列積分表示 (Wright 1933)

$$(29)\quad \phi(\alpha,\beta;z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{(0+)}u^{-\beta}\exp(u+zu^{-\alpha})\,du,\qquad \alpha>0.$$

要証明 (29)，可將被積函数展为 z 的冪級数，应用 1-6(2) 卽得. ϕ 在 $z\to\infty$ 时的漸近性态也曾由 Wright (1934 a, 1940) 研究过. 从 (27) 式可得如下关系式:

$$(30)\quad \alpha z\phi(\alpha,\alpha+\beta;z)=\phi(\alpha,\beta-1;z)+(1-\beta)\phi(\alpha,\beta;z).$$

$$(31)\quad \frac{d\phi(\alpha,\beta;z)}{dz}=\phi(\alpha,\alpha+\beta;z).$$

$$(32)\quad \alpha z\frac{d\phi(\alpha,\alpha+\beta;z)}{dz}=\phi(\alpha,\beta-1;z)+(1-\beta)\phi(\alpha,\beta;z).$$

由于

$$(33)\quad J_\nu(z)=(\tfrac{1}{2}z)^{\nu}\phi(1,\nu+1;-z^2/4),$$

故可把 Wright 函数看作是一类廣义 Bessel 函数. 公式 (30) 是 Bessel 函数遞推关系的一个推廣，(31) 及 (32) 是微分公式的推廣. Wright 把 ϕ 与 Bessel 函数公有的若干性質一一列举了出來. Agarwal (1950, 1951, 1953 a) 討論过以

$$(\tfrac{1}{2})^{\beta-1}(xy)^{\beta-\frac{1}{2}}\phi\left(\alpha, \beta; -\frac{x^2y^2}{4}\right)$$

为核的廣义 Hankel 变换.

18·2. n 階三角函数与双曲綫函数

在本節中，n 表正整数，且

(1) $$\omega=\exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right).$$

n 个函数

(2) $$h_i(x,n)=\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\omega^{(1-i)m}\exp(\omega^m x), \qquad i=1,2,\cdots,n$$

有时称为 n 階双曲綫函数. 如 $n=2$，則轉化为双曲綫函数.

(3) $$h_1(x,1)=e^x,\ h_1(x,2)=\cosh x,\ h_2(x,2)=\sinh x.$$

一般，n 是一不变的正整数，將不予标明. 为了方便起見，可將定义(2)推廣到所有的整数 i（正的，零，或負的），也就是命

(4) $$h_{i+n}(x,n)=h_i(x,n), \qquad i \text{ 整数}.$$

这可以在書寫公式的时候得到簡化.

由于 $\omega^n=1$，故知所有的 h_i 滿足微分方程:

(5) $$\frac{d^n y}{dx^n}-y=0.$$

又由于

(6) $$\sum_{m=1}^{n}\omega^{rm}=0, \qquad \text{整数 } r \text{ 不能被 } n \text{ 整除};$$

$$=n, \qquad \text{整数 } r \text{ 能被 } n \text{ 整除}.$$

故知 h_i 也滿足初始条件

(7) $$\frac{d^{j-1}h_i}{dx^{j-1}}(0)=\delta_{ij}=\begin{matrix}0 & \text{如 } i\neq j,\\ 1 & \text{如 } i=j,\end{matrix} \qquad i,j=1,2,\cdots,n.$$

这样，$h_1,\cdots,h_n$ 組成了方程(5)的綫性独立解組，它們的 Wronski 行列式等于 1.

在 (2) 式中，將指数函数展开并应用 (6) 式，可得冪級数展开式：

$$(8)\qquad h_i(x,n)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{x^{nr+i-1}}{(nr+i-1)!},\qquad i=1,2,\cdots,n.$$

積分表示式

$$(9)\qquad h_i(x,n)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{t^{n-i}e^{xt}}{t^n-1}\,dt,\qquad i=1,\cdots,n$$

其中 C 是一單閉曲綫，在正方向內圍繞單位圓一次．把这一式計值为留数之和即得式 (2)，因而証明了它的正确．从 (8) 可得关系式：

$$(10)\qquad \exp(\omega^m x)=\sum_{i=1}^{n}\omega^{(i-1)m}h_i(x,n),\qquad m\ \text{整数}.$$

n 階双曲綫函数的几个基礎公式为：

$$(11)\qquad h_i(\omega^m x)=\omega^{(i-1)m}h_i(x)$$

$$(12)\qquad \frac{d^j h_i(x)}{dx^j}=h_{i-j}(x)$$

$$(13)\qquad h_i(x+y)=\sum_{j=1}^{n}h_j(x)\,h_{i-j+1}(y)$$

$$(14)\qquad \begin{vmatrix} h_1 & h_2 & \cdots & h_n\\ h_n & h_1 & \cdots & h_{n-1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ h_2 & h_3 & \cdots & h_1\end{vmatrix}=\prod_{m=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\omega^{(i-1)m}h_i(x)\right)=1$$

$$(15)\qquad \int_0^{\infty}e^{-st}h_i(t)\,dt=\frac{s^{n-i}}{s^n-1},\qquad \mathrm{Re}\,s>1,\ i=1,2,\cdots,n.$$

此处 i, j, m 都是任意整数[在(15)中 i 是有限止的]．(11)及(12)由 (2) 導出，(13) 由(5)導來，因为 $h_i(x+\alpha)$是方程(5)的一个解，在$x=0$ 时其 j 階導数等于 $h_{i-j}(\alpha)$．(14)是 $h_1,\cdots,h_n$ 的 Wronski 行列式，这是一个循环行列式（見 Aitken 1939 §51)，可很明顯地計算出來，(15)式是 $h_i(t)$的 Laplace 变换，也可从(2)或(8)導來．

关于这些公式以及其他公式可参看 Poli (1940, 1949a, 后一

著作中有詳細書目), Oniga (1948), Bruwier (1949, 1949 a), Silverman (1953). Poli(1949 a) 指出了一些关系式,適用于 n 为合成数的情形,并給出了一些以 h_i 表示的展开式,以及若干应用. Bruwier (1949 b) 把 $1, \omega, \omega^2, \cdots, \omega^{n-1}$ 作为綫性代数的單位,乘法表由

$$\omega^i \cdot \omega^j = \omega^{i+j}$$

(超复数)确定, $e^{\omega x}$ 是一超复数,公式 (10) 表明 h_i 都是 $e^{\omega x}$ 的分量. Bruwier 应用这一点來証明 $h_i(x)$ 的性質. Lehrer(1954) 研究了第 i 行与第 j 列的元素为 $\alpha_i h_{j-i}(x, n)/\alpha_j$ 的矩陣,此处 $i, j=1, 2, \cdots, n$; $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 为已知常数集合.

从 (8) 及 18-1 (19), 有

$$h_i(x) = x^{i-1} E_{n,i}(x^n) \qquad i=1, 2, \cdots, n. \tag{16}$$

特别是:

$$h_1(x) = E_n(x^n) \tag{17}$$

給出了它与 Mittag-Leffler 函数的关系.

n 个函数

$$k_i(x, n) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r x^{nr+i-1}}{(nr+i-1)!}, \qquad i=1, 2, \cdots, n \tag{18}$$

有时称为 n **階三角函数**,它們都是微分方程

$$\frac{d^n y}{dx^n} + y = 0 \tag{19}$$

的解,并满足初始条件

$$\frac{d^{j-1} k_i}{dx^{j-1}}(0) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{如 } i \neq j, \\ 1 & \text{如 } i = j, \end{cases} \qquad i, j=1, 2, \cdots, n. \tag{20}$$

令

$$k_{i+n}(x, n) = -k_i(x, n), \tag{21}$$

仍可將定义推廣至所有整数 i. 这些函数曾由上述作者研究过,此外,研究这些函数的还有 Mikusinski (1948). 以

(22)　$\lambda=\exp\left(\frac{\pi i}{n}\right)$,

因此，λ 就是 -1 的 n 次根，于是

(23)　$k_i(x)=\lambda^{1-i}h_i(\lambda x, n)$.

这样，k_i 的性質就很容易从 h_i 的性質中推出．主要公式有：

(24)　$k_i(\lambda x)=\lambda^{i-1}h_i(x)$

(25)　$k_i(\omega^m x)=\omega^{(i-1)m}k_i(x)$

(26)　$\frac{d^j h_i(x)}{dx^j}=k_{i-j}(x)$

(27)　$k_i(x)=\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\lambda^{(1-i)(2m+1)}\exp(\lambda^{2m+1}x)$

(28)　$\exp(\lambda^{2m+1}x)=\sum_{i=1}^{n}\lambda^{(i-1)(2m+1)}k_i(x)$

(29)　$k_i(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{t^{n-i}e^{xt}}{t^n+1}dt$

(30)　$k_i(x+y)=\sum_{j=1}^{n}k_j(x)\,k_{i-j+1}(y)$

(31)　$\prod_{m=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda^{(i-1)(2m+1)}k_i(x)\right)=1$

(32)　$\int_0^\infty e^{-st}k_i(t)\,dt=\frac{s^{n-i}}{s^n+1}$,　　　$\mathrm{Re}\,s>1,\ i=1,\cdots,n.$

(33)　$h_i(x, n)+k_i(x, n)=2h_i(x, 2n)$,

　　　$h_i(x, n)-k_i(x, n)=2h_{n+i}(x, 2n)$.

从(27)式可以看出，$k_i(x, n)$ 不是一周期函数，除非 $n=1, 2$. Poli (1949 a) 研究了 $k_i(x)$ 在 $n=3$ 时的零点，而对任意 $n>1$ 的情形则由 Mikusinski (1948) 研究过．Mikusinski 的研究以 $k_1(x),\cdots,k_n(x)$ 所满足的綫性微分方程組为根据，并得出了下列結論：每一 $k_i(x, n)$ 具有無窮多个單階正零点；$k_i(x, n)$ 与 $k_j(x,n)$，$i\neq j\ (\mathrm{mod}\ n)$ 的零点互相交錯．$k_i(x, n)$ 的最小正零点在

$$\left[\frac{(i+n-1)!}{(i-1)!}\right]^{1/n} \text{ 及 } \left[\frac{2(i+n-1)!}{(i-1)!}\right]^{1/n}$$

之間，$k_i(x, n)$的大的正零点大体上是等間隔的，$k_i(x, n)$ 的二相鄰零点間的距离近乎 $\pi \csc(\pi/n)$.

商 $k_i(x, n)/k_j(x, n)$ 可以看作是 $\tan x$ 及 $\operatorname{ctn} x$ 的推廣；見 Oniga (1948), Poli (1949).

Grammel (1948, 1948 a, 1950)給出了三角函数的另一种完全不同的推廣.

18-3. 函数 $\nu(x)$ 及有关函数

本節所要討論的函数是

$$(1) \qquad \nu(x)=\int_0^\infty \frac{x^t\,dt}{\Gamma(t+1)}, \quad \nu(x, \alpha)=\int_0^\infty \frac{x^{\alpha+t}\,dt}{\Gamma(\alpha+t+1)},$$

$$(2) \qquad \mu(x, \beta)=\int_0^\infty \frac{x^t t^\beta\,dt}{\Gamma(\beta+1)\,\Gamma(t+1)},$$

$$\mu(x, \beta, \alpha)=\int_0^\infty \frac{x^{\alpha+t} t^\beta\,dt}{\Gamma(\beta+1)\,\Gamma(\alpha+t+1)}.$$

这些函数中，第一个是 Volterra 在他的褶合式对数理論中所遇到的 (Volterra 1916, 第 6 章; Volterra-Pérès, 1924, 第 10 章); Volterra 以 $\lambda(x, y)$ 表示 $\nu(y-x)$, 以 $\lambda(x, y; \alpha)$ 或 $\lambda(x, y|\alpha)$ 表示 $\nu(y-x, \alpha)$. 这些函数也与运算微積分有关，出現在 Laplace 变换的反演公式中，与某些積分方程的关系尤为重要. 式(2)是最近一些著作中所用的 μ 的定义；一些早期的作品中，μ 所代表的函数与 (2) 式的函数相差一因子 $\Gamma(\beta+1)$.

在 (1), (2) 两式所定义的四函数之間，有下列关系：

$$(3) \qquad \nu(x)=\nu(x, 0)=\mu(x, 0)=\mu(x, 0, 0),$$

$$\nu(x, \alpha)=\mu(x, 0, \alpha),$$

$$\mu(x, \beta)=\mu(x, \beta, 0)=x\mu(x, \beta-1, -1),$$

$$x\nu(x, \alpha-1)-\alpha\nu(x, \alpha)=\mu(x, 1, \alpha).$$

如 $x\neq 0$, α 任意,而 $\operatorname{Re}\beta>-1$, 则 (1), (2) 中的所有积分都收敛. 这四个函数都是 x 的解析函数,枝点在 $x=0$, ∞, 别無其他奇点; $\nu(x,\alpha)$ 及 $\mu(x,\beta,\alpha)$ 是 α 的整函数. 繼續作分部積分可將 μ 的定义推廣到整个 β-平面. 从 (2) 可知

$$(4)\qquad \mu(x,\beta,\alpha)=\int_0^\infty \frac{x^{\alpha+t}}{\Gamma(\alpha+t+1)}\,d\left[\frac{t^{\beta+1}}{\Gamma(\beta+2)}\right]$$

$$=-\frac{1}{\Gamma(\beta+2)}\int_0^\infty t^{\beta+1}\frac{d}{dt}\left[\frac{x^{\alpha+t}}{\Gamma(\alpha+t+1)}\right]dt$$

$$=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$=\frac{(-1)^m}{\Gamma(\beta+m+1)}\int_0^\infty t^{\beta+m}\frac{d^m}{dt^m}\left[\frac{x^{\alpha+t}}{\Gamma(\alpha+t+1)}\right]dt.$$

最后一式可作为 $\mu(x,\beta,\alpha)$, $\operatorname{Re}\beta>-m-1$ 的定义. 这样推廣的函数 $\mu(x,\beta,\alpha)$ 及 $\mu(x,\beta)=\mu(x,\beta,0)$ 都是 β 的整函数,而且是 x 的解析函数, $\mu(x,\beta,\alpha)$ 也是 α 的整函数.

从 (4) 可知

$$(5)\qquad \mu(x,-m,\alpha)=(-1)^{m-1}\frac{d^{m-1}}{d\alpha^{m-1}}\left[\frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right],\quad m=1,2,\cdots,$$

又因 $x^\alpha/\Gamma(\alpha+1)$ 是 α 的整函数,根据 Taylor 展开式,得

$$(6)\qquad \frac{x^{\alpha+t}}{\Gamma(\alpha+t+1)}=\sum_{n=0}^\infty \mu(x,-n-1,\alpha)\frac{(-t)^m}{m!}.$$

为了研究 $\mu(x,\beta,\alpha)$ 在 $x\to 0$ 时的性态,可將 (2) 中的第二式重寫为

$$(7)\qquad \Gamma(\beta+1)\mu(x,\beta,\alpha)=x^\alpha\int_0^\infty \exp\left(-t\log\frac{1}{x}\right)\frac{t^\beta\,dt}{\Gamma(\alpha+t+1)}.$$

从 (6) 有

$$(8)\qquad \frac{1}{\Gamma(\alpha+t+1)}=\sum_{n=0}^\infty \mu(t,-n-1,\alpha)\frac{(-t)^m}{m!},$$

从 Watson 預备定理 (Copson 1935, §9–52) 可知,將 (8) 代入 (7) 并逐項積分可得積分的漸近展开式,展为 $\log(1/x)$ 的降冪. 因此

$$(9)\quad \mu(x,\beta,\alpha)=x^{\alpha}\left(\log\frac{1}{x}\right)^{-\beta-1}\left[\sum_{n=0}^{N-1}\frac{(-1)^{m}(\beta+1)_{m}}{m!}\right.$$

$$\left.\times\mu(1,-n-1,\alpha)\left(\log\frac{1}{x}\right)^{-n}+O\left(\left|\log\frac{1}{x}\right|^{-N}\right)\right],$$

$$\operatorname{Re}\beta>-1,\ x\to 0,\ \left|\arg\left(\log\frac{1}{x}\right)\right|<\pi.$$

其他三个函数展为 $\log(1/x)$ 降幂的渐近展开式可从 (3) 推出. Volterra 求出了 $\nu(x)$ 及 $\nu(x,\alpha)$ 的渐近展开式中的首項.

$\nu(x)$在 $\operatorname{Re}x\to\infty$ 时的性态可从 Ramanujan 積分式 (Hardy, 1940 p. 196)

$$(10)\quad \nu(x)=e^{x}-\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-xt}\,dt}{t[\pi^{2}+(\log t)^{2}]},\qquad \operatorname{Re}x>0$$

中看出. Ford 对 $\nu(x)$的漸近性态作了詳細研究(Ford, 1936). 他的方法大体如下. 沿着 w 平面上頂点在 $-N-\frac{1}{2}-ic,\ k+\frac{1}{2}-ic,\ k+\frac{1}{2}+ic,\ -N-\frac{1}{2}+ic$ 的矩形(此处 k, N 为整数, $k+N\geqslant 0$, c 为正数)求積分

$$H(x,w)=\frac{1}{[\sin(\pi w)]^{2}}\int_{0}^{w}\frac{x^{\alpha+t}\,dt}{\Gamma(\alpha+t+1)}.$$

$H(x,w)$ 是一半純函数, 它在矩形內部的極点为 $w=n,\ n=-N,\ -N+1,\cdots,k-1,k$. H 在 $w=n$ 上的留数为 $\pi^{-2}x^{\alpha+n}/\Gamma(\alpha+n+1)$. 如 $c\to\infty$, 則沿着矩形水平边的積分等于零, 因此

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{k+\frac{1}{2}-i\infty}^{k+\frac{1}{2}+i\infty}H\,dw-\frac{1}{2\pi i}\int_{-N-\frac{1}{2}-i\infty}^{-N-\frac{1}{2}+i\infty}H\,dw$$

$$=\sum_{n=-N}^{k}\frac{\pi^{-2}x^{\alpha+n}}{\Gamma(\alpha+n+1)}.$$

很明顯, 第二个積分等于 $O(|x|^{\alpha-N-\frac{1}{2}})$. 在第一个積分中, 令

$$H(x,w)=H_{1}+H_{2}=\frac{1}{[\sin(\pi\omega)]^{2}}\left(\int_{0}^{k+\frac{1}{2}}+\int_{k+\frac{1}{2}}^{w}\right).$$

于是可証

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{k+1/2-i\infty}^{k+1/2+i\infty} H_1 dw = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{k+1/2}\frac{x^{\alpha+t}\,dt}{\Gamma(\alpha+t+1)}\int_{k+1/2-i\infty}^{k+1/2+i\infty}[\sin(\pi w)]^{-2}dw$$

$$= \pi^{-2}\int_0^{k+1/2}\frac{x^{\alpha+t}\,dt}{\Gamma(\alpha+t+1)}.$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{k+1/2-i\infty}^{k+1/2+i\infty} H_2 dw \to 0,\ \text{当 } k\to\infty \text{ 时},$$

因此，令 $k\to\infty$，得

$$\nu(x,\alpha) - \sum_{n=-N}^{\infty}\frac{x^{\alpha+n}}{\Gamma(\alpha+n+1)} = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-N-1/2-i\infty}^{-N-1/2+i\infty} H\,dw$$

$$= O(|x|^{\alpha-N-1/2}), \qquad |x|\to\infty.$$

將这一結果与 18-1 (21), (22) 合併，則对任一整数 N，有

$$\nu(x,\alpha) = e^x + O(|x|^{\alpha-N}), \qquad x\to\infty,\ |\arg x|\leqslant \tfrac{1}{2}\pi;$$

$$= O(|x|^{\alpha-N}), \qquad x\to\infty,\ \tfrac{1}{2}\pi < |\arg x| \leqslant \pi.$$

对 $\mu(x,\beta,\alpha)$ 可同样導出稍不完全的結果．由于 $w=0$ 上

$$H(x,w,\beta) = \frac{1}{[\sin(\pi w)]^2}\int_0^w \frac{x^{\alpha+t}t^\beta\,dt}{\Gamma(\alpha+t+1)}$$

的枝点关系，应令 $N=-1$，于是如前得

$$\mu(x,\beta,\alpha) - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{\alpha+n}n^\beta}{\Gamma(\alpha+n+1)} = -\frac{1}{2\pi i}\int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty} H(x,w,\beta)\,dw.$$

其余的步驟当与整函数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n n^\beta}{\Gamma(\alpha+n+1)}$$

的漸近展开式有关．

下面的遞推公式，微分公式，級数，積分式等都是 (1) 及 (2) 的直接推論：

(11)　$\mu(x,\beta+1,\alpha) = x\mu(x,\beta,\alpha-1) - \alpha\mu(x,\beta,\alpha).$

(12)　$\dfrac{d^n\nu(x)}{dx^n} = \nu(x,-n),\quad \dfrac{d^n\nu(x,\alpha)}{dx^n} = \nu(x,\alpha-n).$

$$(13) \quad \frac{d^n \mu(x,\beta)}{dx^n}=\mu(x,\beta,-n), \quad \frac{d^n\mu(x,\beta,\alpha)}{dx^n}=\mu(x,\beta,\alpha-n).$$

$$(14) \quad \sum_{n=0}^{\infty} u^n \mu(x,n)=e^{-u}\nu(xe^u),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} u^n \mu(x,n,\alpha)=e^{-(\alpha+1)u}\nu(xe^u,\alpha),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta+1)_n}{n!} u^n \mu(x,\beta+n,\alpha)=e^{-(\alpha+1)u}\mu(xe^u,\beta,\alpha).$$

$$(15) \quad \int_0^\infty e^{\alpha u} u^{\gamma-1}\mu(xe^{-u},\beta,\alpha)\,du=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta-\gamma+1)}{\Gamma(\beta+1)}\mu(x,\beta-\gamma,\alpha),$$

$$\operatorname{Re}\beta>-1, \quad \operatorname{Re}\gamma>0.$$

有关这些函数的許多其他公式可参看 Barrucand (1951), Colombo (1950, 1953), Humbert-Poli (1944).

函数 ν 及 μ 在运算微積分中的关系，一方面是由于公式:

$$(16) \quad \int_0^\infty \frac{e^{-st}\,dt}{\Gamma(t+1)}=\nu(e^{-s}), \quad \int_0^\infty \frac{e^{-st}\,dt}{\Gamma(\alpha+t+1)}=e^{\alpha s}\nu(e^{-s},\alpha),$$

$$(17) \quad \int_0^\infty \frac{e^{-st}t^\beta\,dt}{\Gamma(t+1)}=\mu(e^{-s},\beta), \qquad \operatorname{Re}\beta>-1,$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-st}t^\beta\,dt}{\Gamma(\alpha+t+1)}=e^{\alpha s}\mu(e^{-s},\beta,\alpha). \qquad \operatorname{Re}\beta>-1,$$

这些公式等价于 (1), (2), 并表明函数 ν, μ 是簡單函数的 Laplace 变换；另一方面是由于公式:

$$(18) \quad \int_0^\infty e^{-st}\nu(t)\,dt=(s\log s)^{-1}, \qquad \operatorname{Re}s>1$$

$$\int_0^\infty e^{-st}\nu(t,\alpha)\,dt=s^{-\alpha-1}(\log s)^{-1}, \qquad \operatorname{Re}\alpha>-1, \quad \operatorname{Re}s>1.$$

$$(19) \quad \int_0^\infty e^{-st}\mu(t,\beta)\,dt=s^{-1}(\log s)^{-\beta-1}, \qquad \operatorname{Re}s>1$$

$$\int_0^\infty e^{-st}\mu(t,\beta,\alpha)\,dt=s^{-\alpha-1}(\log s)^{-\beta-1},$$

$$\operatorname{Re}\alpha>-1, \quad \operatorname{Re}s>1.$$

这些公式可用 (1), (2), (4) 式來建立，表明 ν 及 μ 具有非常簡單的 Laplace 变換. 关于应用运算微積分学來推導函数 ν 及 μ 的許多性質，以及这些函数在运算微積分中的应用可參看 Barrucand-Colombo (1950), Colombo (1943, 1943a, 1948), Humbert (1944, 1950), Humbert-Poli (1944), Parodi (1945, 1947, 1948) 及 Poli (1946). 此外，Laplace 变換

$$(20)\quad f(s)=\int_0^\infty e^{-st}F(t)\,dt$$

的許多反演公式之一，如公式 (Paley-Wienér, 1934, p. 39, Doetsch 1937)

$$(21)\quad F(t)=\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty f(s)[\nu(st,-\tfrac{1}{2}+\lambda i)-\nu(st,-\tfrac{1}{2}-\lambda i)]ds$$

中也包含有 $\nu(x,\alpha)$.

積分公式

$$(22)\quad \int_0^\infty \exp\left(-\frac{x^2}{4y}\right)\mu(x,\beta,\alpha)\,dx=2^{\beta+1}y^{\frac{1}{2}}\pi^{\frac{1}{2}}\mu(y,\beta,\tfrac{1}{2}\alpha),$$

$$\operatorname{Re}\alpha>-1,\quad \operatorname{Re}y>0.$$

$$(23)\quad \int_0^\infty x\exp\left(-\frac{x^2}{4y}\right)\mu(x,\beta,\alpha)\,dx=2^{\beta+2}\pi^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}}\mu(y,\beta,\tfrac{1}{2}\alpha-\tfrac{1}{2}),$$

$$\operatorname{Re}\alpha>-2,\quad \operatorname{Re}y>0.$$

$$(24)\quad \int_0^\infty \exp\left(-\frac{x^2}{8y}\right)D_\nu\left(\frac{x}{2^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}}\right)\mu(x,\beta,\alpha)\,dx$$

$$=2^{\beta+\frac{1}{2}\nu+1}\pi^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}}\mu(y,\beta,\tfrac{1}{2}\alpha-\tfrac{1}{2}\nu),$$

$$\operatorname{Re}\alpha>-1,\quad \operatorname{Re}y>0.$$

可將(4)代入被積式中而導出；在最后一式(24)中，可应用8-3(20). 这些公式表明，函数 ν, μ 滿足下列積分方程：

$$(25)\quad \tfrac{1}{2}\pi^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{x^2}{4y}\right)\nu(x)\,dx=\nu(y),$$

$$\tfrac{1}{2}\pi^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{x^2}{4y}\right)\mu(x,\beta)\,dx=2^\beta\mu(y,\beta).$$

$$(26)\quad \tfrac{1}{4}\pi^{-1/2}y^{-3/2}\int_0^\infty x\exp\left(-\frac{x^2}{4y}\right)\nu(x,\,-1)\,dx=\nu(y,\,-1),$$

$$\tfrac{1}{4}\pi^{-1/2}y^{-3/2}\int_0^\infty x\exp\left(-\frac{x^2}{4y}\right)\mu(x,\beta,\,-1)\,dx=2^\beta\mu(y,\beta,\,-1).$$

$$(27)\quad 2^{-\frac{1}{2}\nu-1}\pi^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}}\int_0^\infty\exp\left(-\frac{x^2}{8y}\right)D_{-\alpha}\left(\frac{x}{2^{1/2}y^{1/2}}\right)\nu(x,\alpha)\,dx$$

$$=\nu(y,\alpha),\qquad \operatorname{Re}\alpha>-1.$$

$$2^{-\frac{1}{2}\nu-1}\pi^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}}\int_0^\infty\exp\left(-\frac{x^2}{8y}\right)D_{-\alpha}\left(\frac{x}{2^{1/2}y^{1/2}}\right)\mu(x,\beta,\alpha)\,dx$$

$$=2^\beta\mu(y,\beta,\alpha).\qquad \operatorname{Re}\alpha>-1.$$

在具有核

$$\frac{1}{2\pi^{1/2}y^{1/2}}\exp\left(-\frac{x^2}{4y}\right)$$

的積分方程的情形下,現在已經証明 (Stankovic 1953) (25) 式給出了所有的特征函数,而这些函数在某种意义上都是正規滋長的;(26) 及 (27) 的情形也如此. 关于解包含 ν 及 μ 的其他積分方程可參看 Colombo (1943 a, 1952) 及 Parodi (1948).

參 考 文 献

Agarwal, R. P., 1950: *Ann. Soc. Sci. Bruxelles. Ser. I.* 64, 164-168.

Agarwal, R. P., 1951: *Bull. Calcutta Math. Soc.* 43, 153-167.

Agarwal, R. P., 1953: *C. R. Acad. Sci. Paris* 236, 2031-2032.

Agarwal, R. P., 1953 a: *Bull. Calcutta Math. Soc.* 45, 69-73.

Aitken, A. C., 1939: *Determinants and matrices*, Oliver and Boyd, Edinburgh and London.

Barnes, E. W., 1906: *Philos. Trans. Royal Soc. A* 206, 249-297.

Barrucand, Pierre, 1951: *C. R. Acad. Sci. Paris* 232, 1058-1060.

Barrucand, P. A., and Serge Colombo, 1950: *C. R. Acad. Sci. Paris* 230, 1335-1337.

Bruwier, Laurent, 1949: *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège* 18, 72-82.

Bruwier, Laurent, 1949 a: *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège* 18, 169-183.

Bruwier, Laurent, 1949 b: *Mathesis* 58, 216-222.

Buhl, Adolphe, 1925: *Séries analytique. Sommabilité.* (*Mem. Sci. Math. Fasc.* 7) Gauthier-Villars, Paris.

Colombo, Serge, 1943: *Bull. Sci. Math.* (2) 67, 104–108.

Colombo, Serge, 1943 a: *C. R. Acad. Sci. Paris* 216, 368–369.

Colombo, Serge, 1948: *C. R. Acad. Sci Paris* 226, 1235–1236.

Colombo, Serge, 1950: *Ann. Télécomm.* 5, 347–364.

Colombo, Serge, 1952: *C. R. Acad. Sci. Paris* 235, 857–858, 928–929.

Colombo, Serge, 1953: *Bull. Sci. Math.* (2) 77, 89–104.

Copson, E. T., 1935: *An introduction to the theory of functions of a complex variable.* Oxford.

Doetsch, Gustav, 1937: *Math. Z.* 42, 263–286.

Ford, W. B., 1936: *The asymptotic developments of functions defined by Maclaurin series.* Univ. of Michigan.

Grammel, Richard, 1948: *Arch. Math.* 1, 47–51.

Grammel, Richard, 1948 a: *Ing.-Arch.* 16, 188–200.

Grammel, Richard, 1950: *Ing.-Arch.* 18, 250–254.

Hardy, G. H., 1940: *Ramanujan.* Cambridge.

Humbert, Pierre, 1944: *C. R. Acad. Sci. Paris* 218, 99–100.

Humbert, Pierre, 1950: *C. R. Acad. Sci. Paris* 230, 504–505.

Humbert, Pierre, 1953: *C. R. Acad. Sci. Paris* 236, 1467–1468.

Humbert, Pierre and R. P. Agarwal, 1953: *Bull. Sci. Math.* (2) 77, 180–185.

Humbert, Pierre and Paul Delerue, 1953: *C. R. Acad. Sci. Paris* 237, 1059–1060.

Humbert, Pierre and Louis Poli, 1944: *Bull. Sci. Math.* (2) 68, 204–214.

Lehrer, Yehiel, 1954: *Riveon Lematematika* 7, 71–73.

Lindelöf, Ernst, 1903: *Bull. Sci. Math.* (2) 27, 213–226.

Malmquist, Johannes, 1905: *Acta Math.* 29, 203–215.

Mikusiński, Jan G., 1948: *Ann. Soc. Polon. Math.* 21, 46–51.

Mittag-Leffler, G. M., 1903: *C. R. Acad. Sci. Paris* (2), 137, 554–558.

Mittag-Leffler, G. M., 1904: *R. Accad. dei Lincei, Rendiconti* (5) 13, 3–5.

Mittag-Leffler, G. M., 1905: *Acta Math.* 29, 101–182.

Oniga, Théodore, 1948: *C. R. Acad. Sci. Paris* 227, 1138–1140.

Paley, R. E. A. C. and Norbert Wiener, 1934: *Fourier transforms in the complex domain.* American Mathematical Society, New York.

Parodi, Maurice, 1945: *Bull. Sci. Math.* (2) 69, 174–184.

Parodi, Maurice, 1947: *C. R. Acad. Sci. Paris* 224, 780–782.

Parodi, Maurice, 1947 a: *Revue Sci.* 85, 360.

Parodi, Maurice, 1948: *Ann. Soc. Sci. Bruxelles I,* 62, 24–26.

Phragmén, Edvard, 1904: *Acta Math.* 28, 351–368.

Poli, Louis, 1940: *Ann. Soc. Sci. Bruxelles I,* 60, 15–30.

Poli, Louis, 1946: *C. R. Acad. Sci. Paris* 222, 580–581.

Poli, Louis, 1949: *Ann. Univ. Lyon. Sect. A* (3) 12, 5–25.

Poli, Louis, 1949 a: *Cahiers Rhodaniens* 1, 1–15.

Pollard, Harry, 1948: *Bull. Amer. Math. Soc.* 54, 1115–1116.

Silverman, L. L., 1953: *Riveon Lematematika* 6, 53–60.

Stanković, Bogoljub, 1953: *Rec. Acad. Serbe Sci.* 35, 95–106.

Volterra, Vito, 1916: *Acc. dei Lincei, Memorie* (5) 11, 167–249.

Volterra, Vito and Joseph Pérès, 1924: *Leçons sur la composition et les fonctions permutables.* Gauthier Villars, Paris.

Wiman, Anders, 1905: *Acta Math.* 29, 191–201, 217–234.

Wright, E. M., 1933: *J. London Math. Soc.* 8, 71–79.

Wright, E. M., 1934: *Acta Math.* 63, 143–191.

Wright, E. M., 1934 a: *Proc. London Math. Soc.* (2) 38, 257–270.

Wright, E. M., 1940: *Quart. J. Math. Oxford. Ser.* 11, 36–48.

第十九章　母函数❶

第一部分：概論

19-1. 引言

如果一列数 $g_1, g_2, \cdots$ 可由某一函数的無窮級数展开式中的系数序列來确定，我們称这一函数为数 g_n 的母函数.

最常見的無窮級数即是冪級数

$$G(t)=\sum_{n=0}^{\infty} g_n t^n.$$

g_n 常常是一个或几个变数(如 $x_1, x_2, \cdots, x_p$)的函数，因此有如下形式的关系

$$(1)\qquad G(x_1, \cdots, x_p; t)=\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x_1, \cdots, x_p) t^n.$$

此处的 G 称为函数 $g_n(x_1, \cdots, x_p)$ 的母函数，$x_1, \cdots, x_p, t$ 是 $p+1$ 个自变数. 除了在几个特殊重要的情形以外，本章中的 p 將恆視为 1，因此我們可以把單变数函数 $g_n(x)$ 的母函数 $G(x, t)$ 寫成

$$G(x, t)=\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x) t^n.$$

大体說來，作为母函数的冪級数具有一正的收斂半徑. 但有时也应考慮收斂半徑等于零的冪級数，即除了在 $t=0$ 上以外，到处發散的冪級数. 如果收斂性問題可以不管，那么这种冪級数就称为形式冪級数，記为

❶ 本章內容以 H. 彼得曼所編母函数表为根据.

E. D. Rainville 教授对母函数表作了补充，并在本章的編寫中給了很多协助和建議.

(2) $G(x, t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x) t^n,$

并称 $G(x, t)$ 等价于或連帶于(2)式右側的形式冪級数.

除了冪級数之外,有时也考慮到 Laurent 級数,即形如下式的級数

(3) $G(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n(x) t^n.$

冪級数及 Laurent 級数并不是母函数中的唯一級数. 在数論中常会遇到其他类型的級数,像 17–12 節中的母函数即为例子. 此外,如組合分析中常見的階乘級数則是又一种类型.

"母函数"这一名称源自 Laplace (1812). 关于 Laplace 在母函数方面研究的簡要介紹可参看 Doetsch (1937). Laplace 所用的不僅有母級数,还有母積分. 这一类積分中最重要的現在称为 Laplace 積分,通常寫为

$$f(s) = \int_0^{\infty} e^{-su} g(u) du.$$

作变数变换 $t = e^{-s}$,就很容易看出它与母冪級数的关系. 实际上,級数与積分都可以用 Laplace–Stieltjes 積分

(4) $f(s) = \int_0^{\infty} e^{-su} d\alpha(u)$

來代替,此处 $\alpha(u)$ 是一有界变分函数,上式的右側称为 Stieltjes 積分. 現代的很多作者,如 Widder (1936) 等,应用"母函数"一辞,其意义所指的是(4). 熟習 Stieltjes 積分的讀者当可看出,母冪級数, Dirichlet 級数, Laplace 積分等都是(4)的特例.

19–2. 母函数应用范例

数列或函数序列 $\{g_n\}$ 的母函数的構作目的常以 g_n 性質的研究为主. 下面是組合分析中的一个典型例子.

在普通代数中,乘法具有結合性,即 $(ab)c = a(bc)$,这一性質

可推廣到任意数的因子. n 个因子的積可由这些因子逐次來求,每次二个相乘,但与因子的結合無关. 卽使在有些代数中,乘法的变换律 $ab=ba$ 不成立,但乘法的結合性仍有效. 矩陣代数卽为一例. 不过,仍然有乘法結合律不生效的代数,称为**非結合代数**. 在这种代数中, $(ab)c$ 与 $a(bc)$ 將不同,因此,積 abc 可有 $p_3=2$ 个不同的値,因为有 ab 乘 c 及 a 乘 bc. 注意,这里对因子的順序并不变更;結果的不同完全由乘法的非結合特性所引起. 給定 n 个因子,按規定順序排列,要把 n 因子的相乘化为每次二个因子的 $n-1$ 次乘法,可有許多方法來插加括号. 例如, 4 个因子 a, b, c, d 的可能情形为

$$((ab)(cd)),\ (a(b(cd))),\ (((ab)c)d),\ (a((bc)d)),$$
$$((a(bc))d).$$

設 p_n 为 n 个相乘的因子中插入括号的方法数, 則顯然有 $p_1=p_2=1$, $p_3=2$, $p_4=5$.

求 n 个因子相乘積的最后一步是前 m 个因子的積乘上后 $n-m$ 个因子的積的乘法. 前 m 个因子有 p_m 个不同的積, 后 $n-m$ 个因子有 p_{n-m} 个不同的積,此处 m 可取 $1, 2, \cdots, n-1$ 中的任一値. 因此

$$(1)\qquad p_n=p_1p_{n-1}+p_2p_{n-2}+\cdots+p_{n-1}p_1.$$

如 $n=4$, 則得, $p_4=1\times2+1\times1+2\times1=5$;

如 $n=5$, 則得 $p_5=1\times5+1\times2+2\times1+5\times1=14$, 等等.

現在組成母函数

$$(2)\qquad G(t)=\sum_{n=1}^{\infty}p_nt^n,$$

从(1)式可以看出,当 $n\geqslant2$ 时,在

$$(3)\qquad [G(t)]^2$$
$$=p_1^2t^2+(p_2p_1+p_1p_2)t^3+(p_3p_1+p_2p_2+p_1p_3)t^4+\cdots$$

中, t^n 的系数顯然仍是 p_n. (3) 式中沒有一次項. 因此,有

(4) $[G(t)]^2+t=G(t)$.

这是 $G(t)$ 的一个二次方程，$G(t)$ 就是方程的一个根，在 $t=0$ 时等于零．設 $|4t|<1$，命 $(1-4t)^{1/2}$ 代表平方根中具有正实部的一根，則得

(5) $G(t)=1/2-1/2(1-4t)^{1/2}$.

將(5)的右側展为二項式級数，于是得

$$(6)\qquad G(t)=-1/2\sum_{n=1}^{\infty}(-4)^n\binom{1/2}{n}t^n$$

因此

$$(7)\qquad p_n=(-1)^{n-1}2^{2n-1}\binom{1/2}{n}=\frac{1}{n-1}\binom{2n-2}{n},\qquad n\geqslant 2.$$

除了用以可求得一个計算 p_n 的簡單公式(不依賴于 $p_{n-1}, p_{n-2},\cdots$ 等的計算)之外，公式(7)可用以研究 p_n 在 $n\to\infty$ 时的漸近性态．从 1-18(4) 式可導得

$$(8)\qquad p_n=\pi^{-1/2}2^{2n-2}n^{-3/2}[1+O(n^{-1})]\qquad n\to\infty.$$

母函数在多項式系統的研究中也是一有力的工具．作为一个例子，我們來研究車比雪夫多項式 $T_n(x)$，由下列母函数定义：

$$(9)\qquad G(x,t)=\frac{1-t^2}{1-2xt+t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_nT_n(x)t^n,$$

此处 $\varepsilon_0=1$, $\varepsilon_n=2$, $n=1, 2, 3, 4, \cdots$. $T_n(x)$ 的性質已在第 10 章中討論过．將 G 展为等比級数

$$(10)\qquad G(x,t)=(1-t^2)\sum_{n=0}^{\infty}(-t^2+2xt)^n,$$

这表明右側 t^n 的系数是 x 的多項式，而且在 t^n 的系数中，x 的最高次方恰是 x^n，而 x^nt^n 的系数則为 2^n．由此可見 $T_n(x)$ 应是 x 的 n 次多項式，而在 $n\geqslant 1$ 时，$T_n(x)$ 中 x^n 的系数应为 2^{n-1}.

以 $1-2tx+t^2$ 乘(9)式，并將二側 t^n 的項合併，得

$$\varepsilon_nT_n-2x\varepsilon_{n-1}T_{n-1}+\varepsilon_{n-2}T_{n-2}=\begin{cases}0 & n>2\\ -1 & n=2\end{cases}$$

由于从(10)可得 $T_0=1$, $T_1=x$, 故有

(11) $T_n-2xT_{n-1}+T_{n-2}=0,\qquad n=2, 3, 4, \cdots$

設 x 为实数，且 $-1<x<1$. 則 (9) 式右側的級数对 t 的所有复数值，$|t|<1$, 絕对收斂，由于 $G(x, t)$ 在作为 t 的函数时，其奇点在 $t=t_1$, $t=t_2$, 此处

(12) $t_1=x+(x^2-1)^{1/2},\ t_2=x-(x^2-1)^{1/2},\ |t_1|=|t_2|=1.$

于是由柯西公式可得

(13) $\varepsilon_n T_n(x)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C t^{-n-1}G(x, t)\,dt,$

其中 C 为圍繞 $t=0$ 的任一單閉圍綫，使 C 上有 $|t|<1$. 例如像(13)那样的積分表示式可用以估計它們所表示的函数. 在所論的特殊情形下，可以計算出(13)中的積分. 令

$$x=\cos\phi,\ t_1=e^{i\phi},\ t_2=e^{-i\phi},$$

因此

$$G(x, t)=(1-t^2)(t-e^{i\phi})^{-1}(t-e^{-i\phi})^{-1},$$

从(13)式得

(14) $\varepsilon_n T_n(x)=(2\pi i)^{-1}\displaystyle\int_C t^{-n-1}(1-t^2)(t-e^{i\phi})^{-1}(t-e^{-i\phi})^{-1}dt.$

如 $n\geqslant 1$, 在 ∞ 上沒有奇点，積分可計值为極 t_1 及 t_2 上的留数之和，得

(15) $T_n(x)=\cos n\phi=\cos(n\cos^{-1}x).$

这一式在 $n=0$ 时也正确.

如在(9)式中令

(16) $x=\cos\phi,\ t=e^{i\omega}$

則得

(17) $G(x, t)=G^*(\phi, \omega)=(1-e^{i\omega+i\phi})^{-1}+(1-e^{i\omega-i\phi})^{-1}-1.$

因此 G^* 是函数之和，只依賴于 $\phi+\omega$ 及 $\phi-\omega$, 因而

(18) $\dfrac{\partial^2 G^*}{\partial\omega^2}=\dfrac{\partial^2 G^*}{\partial\phi^2}.$

但

(19) $$\frac{\partial}{\partial\phi}=\frac{\partial x}{\partial\phi}\frac{\partial}{\partial x}=-(1-x^2)^{½}\frac{\partial}{\partial x}$$

(20) $$\frac{\partial}{\partial\omega}=\frac{\partial t}{\partial\omega}\frac{\partial}{\partial t}=it\frac{\partial}{\partial t}$$

將(19), (20)代入 (18), 从(17)可得

(21) $$\left[(1-x^2)^{½}\frac{\partial}{\partial x}\right]\left[(1-x^2)^{½}\frac{\partial}{\partial x}G\right]+\left(t\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(t\frac{\partial}{\partial t}G\right)=0.$$

將(21)式的左側展为 t 的冪級数, 可知 $T_n(x)=y$ 滿足微分方程

(22) $$(1-x^2)y''-xy'+n^2y=0.$$

計算積分

(23) $$\int_{-1}^{1}\frac{1-t^2}{1-2xt+t^2}\,\frac{1-s^2}{1-2xs+s^2}(1-x^2)^{-½}\,dx$$

卽可得 $T_n(x)$ 的正交性关系. 这一積分是一初等積分, 可很容易計值. 結果是

$$2\pi\left(\frac{1}{1-st}-\frac{1}{2}\right).$$

展为 s 及 t 的冪級数, 比較 s^mt^n 的系数, 可知

(24) $$\int_{-1}^{1}T_n(x)T_m(x)(1-x^2)^{-½}\,dx=\begin{cases}0 & n\neq m.\\ \pi/\epsilon_n & n=m.\end{cases}$$

虽然, 这在証明(24)时相当費力, 但因这一方法可以应用在許多情形中, 所以在这里应当提一提.

公式 (13), (22), (24) 的証明就是应用母函数可求生成函数的積分表示式、微分方程或積分关系的典型例子. 一般說來, 如果可以求得 G 与 G 对 t 及对 x 的導数之間的关系, 就可求得遞推关系及微分方程的組合. 例如, 設

(25) $$G(x,t)=(1-2tx+t^2)^{-½}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n,$$

其中 $P_n(x)$ 是 n 次勒上特多項式(見第 3 章), 从恆等式

(26)　$t\dfrac{\partial G}{\partial t}=(x-t)\dfrac{\partial G}{\partial x}$

可得

(27)　$nP_n(x)=xP'_n(x)-P'_{n-1}(x)$,

又从关系式

(28)　$(1-2tx+t^2)\dfrac{\partial G}{\partial x}=tG$

可得

(29)　$P'_n-2xP'_{n-1}+P'_{n-2}=P_{n-1}$.

应用(27)式,以 $n-1$ 代 n, 來消去 P'_{n-2}, 則得

(30)　$nP_{n-1}=P'_n-xP'_{n-1}$.

从 (27) 及 (30), 可得

(31)　$(1-x^2)P'_n=-nxP_n+nP_{n-1}$.

將(31)式对 x 微分,并將所得結果与(27)合併,卽得勒上特微分方程

(32)　$(1-x^2)P''_n-2xP'_n+n(n+1)P_n=0$.

在母函数中包含一指数函数的許多情形中,都可以求得差分方程. 由 Bernoulli 多項式 $B_n(x)$ (見第1章)的母函数

(33)　$te^{xt}(e^t-1)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n(x)t^n/n!$

中可得

(34)　$t(e^t-1)^{-1}[e^{(x+1)t}-e^{xt}]=\sum_{n=0}^{\infty}[B_n(x+1)-B_n(x)]t^n/n!$

因为(34)式左側为 $t\exp(xt)$, 故有

(35)　$B_n(x+1)-B_n(x)=nx^{n-1}$.

生成函数的其他类型的函数方程可用同样方法來求得.

最后,我們可以根据数列或函数序列 g_n 的母函数的存在性应用 Abel 或 Cesáro 求和方法來确定

(36)　$\sum_{n=0}^{\infty}g_n$.

如

(37) $G(t)=\sum_{n=0}^{\infty} g_n t^n$

并設

(38) $\Lambda(t)=\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n t^n$,

則

(39) $\Lambda(t)G(t)=\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n t^n$

其中

(40) $\gamma_n=\lambda_n g_0+\lambda_{n-1}g_1+\cdots+\lambda_0 g_n$

19-3. 一般定理

对于每一个 $n=0, 1, 2, \cdots$, 設 $g_n(x)$ 是 x 的一个多項式,它的次数恰是 n. 如

$$\frac{d}{dx} g_n(x)\equiv g_n'(x)=g_{n-1}(x) \qquad n=1, 2, 3, \cdots$$

則称 $g_n(x)$ 組成多項式的Appell集. 此时,存在有一个形式冪級数

(1) $A(t)\sim\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \qquad a_0\neq 0$

使得

(2) $A(t)e^{tx}\sim\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x) t^n$.

Thorne (1945) 証明:多項式 $g_n(x)$ 的集合是一 Appell 集的充要条件为: 存在有一个在$(0, \infty)$上具有有界变分的函数 $\alpha(x)$, 使得 Stieltjes 積分

$$\mu_n=\int_0^{\infty} x^n d\alpha(x) \qquad n=0, 1, 2, \cdots$$

存在,且

$$\mu_0\neq 0,$$

$$\int_0^\infty g_n^{(r)}(x)\,d\alpha(x)=\begin{cases}0 & n\neq r\\ 1 & n=r.\end{cases}$$

于是形式冪級数 $A(t)$ 由下式定义:

$$A(t)\sim\left(\sum_{n=0}^\infty \mu_n t^n/n!\right)^{-1}\sim\left[\int_0^\infty e^{xt}d\alpha(x)\right]^{-1}.$$

Scheffer (1945) 曾証明:集 $g_n(x)$ 是一 Appell 集的充要条件为:存在有一个在 $(0, \infty)$ 上具有有界变分的函数 $\beta(x)$,使得

$$b_n=\int_0^\infty x^n d\beta(x) \qquad n=0, 1, 2, \cdots$$

存在,且

$$b_0\neq 0,$$

(3) $$g_n(x)=\int_0^\infty \frac{(x+t)^n}{n!}d\beta(t) \qquad n=0, 1, 2, \cdots.$$

从此,应用相同的 $\beta(t)$, Varma (1951) 証明多項式

(4) $$g_n^*(x)=\int_0^\infty \frac{x^n}{n!}\,{}_3F_2(-n, a, b; c, d; -x/t)d\beta(t)$$

也組成一 Appell 集. 此处 ${}_3F_2$ 表示一廣义超比級数(見 4-1 節). 与 g_n^* 連帶的母函数变为

(5) $$A^*(u)e^{ux}\sim\sum_{n=0}^\infty g_n^*(x)u^n$$

此处

(6) $$A^*(u)\sim\int_0^\infty {}_2F_2(a, b; c, d; ut)d\beta(t).$$

关于 Appell 集的例子見公式 19-7(1), 19-7(2), 19-7(23) 及 19-7(34).

Halphén (1881)及 Bird (1934)曾研究过如下类型的展开式:

(7) $$\frac{e^{xt}}{f(t)}=\sum_{n=-\infty}^\infty g_n(x)t^n$$

Scheffer (1939) 应用 Appell 集这一概念作为多項式集合分类的根据. 对于每一个 $n=0, 1, 2, \cdots$, 設 $g_n(x)$ 精确地是 x 的 n

次多項式，則存在一算符 J，由 $g_n(x)$ 唯一地确定并具有如下的性質：

J 是运用于 x^n（因而是 x 的任一多項式）上的一个綫性算符．設 $y=y(x)$ 为 x 的任一多項式．設 $J[y]$ 代表 y 經 J 映射而成的多項式．如果对于 $n=1, 2, 3, \cdots$，J 可使 $J[x^n]$ 恰为 $n-1$ 次，而 $J[x^0]=0$，則可以証明，对于所有的 y，有

$$(8)\qquad J[y]=\sum_{m=1}^{\infty} L_m(x)y^{(m)}(x),$$

其中 $y^{(m)}$ 为 y 的 m 階導数，且

$$(9)\qquad L_m(x)=l_{m,0}+l_{m,1}x+\cdots+l_{m,m-1}x^{m-1}$$

是 x 的一个多項式，次数 $\leqslant m-1$，使得

$$(10)\qquad \lambda_m=ml_{1,0}+m(m-1)l_{2,1}+\cdots+m!l_{m,m-1}\neq 0, \qquad m=1, 2, 3, \cdots$$

令 $L_m(x)$（因此 J）由下式唯一地确定：

$$(11)\qquad J[g_n]=g_{n-1} \qquad n=1, 2, 3, \cdots$$

命 k 为 $L_m(x)$ 的最大次数（如 L_m 的次数無界，則 $k=\infty$），則多項式集合 $g_n(x)$ 称为是 A-型 k 集合．Appell 集是 A-型 0 的特殊集．对于这种集來說，

$$L_m(x)=c_m \qquad c_1\neq 0, m=1, 2, 3, \cdots$$

c_m 都是常数．如与 J 連帶的有形式冪級数

$$J(t)\sim c_1t+c_2t^2+c_3t^3+\cdots$$

則可定义另一形式冪級数 $H(t)$ 为

$$(12)\qquad J[H(t)]=t.$$

所有滿足(11)的集 $g_n(x)$ 可用下法來構造：选定常数 $a_n(n=0, 1, 2, \cdots)$ 的一个任意集合，使 $a_0\neq 0$，令

$$A(t)\sim\sum_{n=0}^{\infty} a_nt^n,$$

且

$$(13)\qquad A(t)e^{xH(t)}\sim\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)t^n.$$

Meixner (1934) 曾确定过这一类母函数所定义的全部正交集 $g_n(x)$ (見 19-12 節).

Wright (1932) 曾研究过

(14) $$(1-t)^{\beta}\Phi(t)\exp\left(\frac{x}{1-t}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}g_n(x)t^n$$

的情形,此处 $\Phi(t)$ 在 $|t|\leqslant 1$ 时正則,他求得了 $g_n(x)$ 在 $n\to\infty$ 时的漸近性态.

Huff (1947) 及 Huff-Rainville (1952) 証明:如

(15) $$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n/n!$$

且

(16) $$\phi(t)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n t^n,$$

則

(17) $$\phi(t)f(xt)=\sum_{n=0}^{\infty}g_n(x)t^n$$

在而且只有在

(18) $$f(z)={}_0F_k(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k;\sigma z)$$

时定义了一个 A-型 k 的集 $g_n(x)$, 此处 ${}_0F_k$ 表廣义超比級数(見第 4 章), $\beta_1,\cdots,\beta_k,\sigma$ 都是任意常数. 关于(17)型的母函数的許多其他結果見 Huff (1947) 及 Brenke (1945). Rainville (1947, 未發表)証明:在(16)中的 $\phi(t)$ 等于 $\exp t$ 的特殊情形下, (17)式中的 $g_n(x)$ 滿足下式:

(19) $$(1-t)^{-c}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(c)_n a_n}{n!}\left(\frac{xt}{1-t}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(c)_n g_n(x)t^n.$$

关于应用,可參看 19-10(15), 19-10(16).

Rainville (1945) 曾証明:如

(20) $$H(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n/n!$$

且

(21) $G(x,t)=e^tH(xt)=\sum_{n=0}^{\infty}g_n(x)t^n/n!$,

則

(22) $g_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_kx^k$

(23) $xg_n'(x)=n[g_n(x)-g_{n-1}(x)]$ $n\geqslant 1$

(24) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}g_k(x)=(-1)^na_nx^n$

(25) $g_n(xy)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}y^k(1-y)^{n-k}g_k(x)$.

Fasenmyer (1947) 曾証明:如

(26) $H(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$,

則

(27) $\frac{1}{1-t}H\left[\frac{-4tx}{(1-t)^2}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}g_n(x)t^n$

其中

(28) $g_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k(n+1)_ka_k}{(\frac{1}{2})_kk!}x^k$.

如 $H(x)$ 为一廣义超比級数 ${}_pF_q$ (見第四章),則每一 g_n 变为廣义超比級数 ${}_{p+2}F_{q+2}$.

K. P. Williams (1924)研究了母函数 $\Phi(2xt+t^2)$, 此处$\Phi(z)$是 z 的一冪級数,他用他的結果來說明勒上特与漢米特多项式的特性.

Truesdell (1948) 研究了母函数 $F(z,\alpha)$, 它滿足方程

(29) $\frac{\partial}{\partial z}F(z,\alpha)=F(z,\alpha+1)$.

特别是,他証明了下面的定理:

設 $F(z+t,\alpha)$ 具有 t 的 Taylor 冪級数,則

(30) $F(z+t, \alpha)=\sum_{n=0}^{\infty} F(z, \alpha+n)t^n/n!$.

如果对于 α 的固定值及 $z=z_0$，有

(31) $\sup_{n\to\infty} \dfrac{F(z_0, \alpha+n+1)}{F(z_0, \alpha+n)}=\dfrac{1}{k}$ $\quad k\neq 0$,

又如存在有一个实数 $h<1$，使得，对于 w（此处 $|w|<k$）的某一值，有

(32) $|F(z+tw, \alpha)|<e^{ht}$ $\quad t>t_0$

则对于 w 的該一值，必有

(33) $\sum_{n=0}^{\infty} F(z, \alpha+n)w^n=\int_0^{\infty} e^{-t}F(z+tw, \alpha)\,dt$,

只要級数在一包含固定点 z_0 的域上关于 z 一致收斂。

Truesdell 的另外一些定理是关于下面的級数的：

(34) $\sum_{n=0}^{\infty} F(z, \alpha-n)w^n$.

各种应用列于母函数表中，見 19-9～19-10 節。

19-4. 符号关系

早期的文献中常用到符号关系，借以將某些恆等关系表为簡單形式，并借以簡化証明。現代文献中，对这种符号关系已很少应用。茲举二例如下。

我們將根据 Rainville (1946) 的約定，应用記法 $\doteq$ 代替 $=$，表示指数应放在任何符号如 B, P, H, L 等的下脚，此种符号沒有下标是沒有定义的。因此，如以 B_n 表 Bernoulli 数，以下述母函数定义：

(1) $t(e^t-1)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty} B_n t^n/n!$,

则以

(2) $B_n(x)\doteq(x+B)^n$

表示 19-2(33) 式的 Bernoulli 多項式 $B_n(x)$ 可以顯式表示为

(3) $$B_n(x)=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}B_r x^{n-r}.$$

这一表达式的符号導法如下：母函数 (1) 及 19-2(33) 寫成符号形式为

$$t(e^t-1)^{-1}\doteqdot e^{Bt},\quad te^{xt}(e^t-1)^{-1}\doteqdot e^{B(x)t},$$

經比較后，得

$$e^{B(x)t}\doteqdot e^{xt}e^{Bt}\doteqdot e^{(x+B)t},$$

比較 t^n 的系数卽得 (2).

同理，如 $L_n(x)$ 为 n 次拉甘尔多項式，

(4) $$L_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k n!}{k!k!(n-k)!}x^k,$$

又如 P_k 为 k 次勒上特多項式，則关系式

(5) $$2^n L_n[P(x)]\doteqdot[L(x-1)+L(x+1)]^n$$

就表示

(6) $$2^n\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k n!}{k!k!(n-k)!}P_k(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}L_k(x-1)L_{n-k}(x+1).$$

关系式(5)及(6)系由 Rainville (1946) 所証明，他給出了很多关于漢米特，勒上特及拉甘尔多項式之間的类似关系．这些关系的証明要应用母函数．

在差分学中常用符号 E 作为移动算符(Shift operator)，它將下标(或任何其他特定的变数)增加 1. 例如

(7) $$Eg_n=g_{n+1},\ E^k g_n=g_{n+k},\qquad k,n=0,1,2,\cdots$$

应用这一記法，漢米特多項式的母函数

(8) $$e^{2xt-t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}H_n(x)t^n/n!$$

可寫为

(9) $$e^{2xt-t^2}=e^{Et}H_0(x).$$

上面定义的算符 E 本运用在离散变数 n 上．Friedman

(1952) 將它的定义推廣，使之也能运用在变数 x 上．給定 x 的任一函数，將它展为漢米特多項式級数，并將 E 运用于漢米特多項式上．也就是說，如

(10) $f(x)=a_0H_0(x)+a_1H_1(x)+\cdots$

則定义

(11) $Ef(x)=a_0H_1(x)+a_1H_2(x)+\cdots$.

所有其他变数 $(s, t, y, \cdots)$ 不受 E 的影响，因此可与 E 交換．乘一变数 x 的乘法也定义了一个运用在任一函数 $f(x)$ 上的算符．从遞推关系

(12) $H_{n+1}(x)=2xH_n(x)-2nH_{n-1}(x)$

得

$$xH_n(x)=\tfrac{1}{2}H_{n+1}(x)+nH_{n-1}(x)$$

因此，乘以 x 的乘法將(10)中的函数 $f(x)$ 映成

(13) $xf(x)=a_1H_0(x)+\sum_{n=1}^{\infty}[\tfrac{1}{2}a_{n-1}+(n+1)a_{n+1}]H_n(x)$.

从(11)及(13)得

(14) $xEf(x)-Exf(x)=f(x)$.

像(14)式那种二个算符之間的关系在量子論中有重要的意义．方程(14)說明 E 与 x 不能交換．但我們可以不包含 x 的量乘任一包含 E 的表达式，而后相加．例如，从

(15) $e^{iEt}H_0(x)=\sum_{n=0}^{\infty}i^nH_n(x)t^n/n!=e^{2ixt+t^2}$

及

(16) $\int_{-\infty}^{\infty}\exp\,(ist-\tfrac{1}{4}t^2y^{-2})\,dt=2\pi^{1/2}y\exp\,(-y^2s^2)$

中，以 E 代 s，得

(17) $2y\pi^{1/2}e^{-E^2y^2}H_0(x)=2y\pi^{1/2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nH_{2n}(x)y^{2n}/n!$

(18) $=\int_{-\infty}^{\infty}\exp\,(2ixt+t^2-\tfrac{1}{4}t^2y^{-2})\,dt$

(19) $$= \frac{2\pi^{1/2} y}{(1-4y^2)^{1/2}} \exp\left(-\frac{x^2y^2}{1-4y^2}\right).$$

比較(17)及(19)可得

(20) $$w^{-1}\exp(-x^2y^2w^{-2}) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n H_{2n}(x) y^{2n}/n!$$

此处 $w^2 = 1-4y^2$

19-5. 漸近表示式

母函数可用以确定生成数(或函数)在 $n\to\infty$ 时的漸近性态，其效果良好．如

(1) $$G(t) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n t^n$$

具有一有限的收斂半徑，則 $G(t)$ 在收斂圓上將具有一或若干奇点，这些奇点的位置及本質可确定 g_n 在 n 很大时的性态．如(1)处处收斂，則 $G(t)$ 是一整函数，$G(t)$ 在 $|t|$ 很大时的性态就确定了 g_n 在 n 很大时的性态．

Darboux (1878) 首先研究了(1)的有限收斂半徑的情形，其后有很多作者作了这一研究．Darboux 的方法由 Szegö (1939, 定理 8-4) 列成为下面的一般性定理：

設 $G(t)$ 在 $|t|<1$ 时正則，并設它在單位圓 $|t|=1$ 上具有有限数的不同奇点

(2) $$e^{i\phi_1},\ e^{i\phi_2},\ \cdots,\ e^{i\phi_r}.$$

設在 $e^{i\phi_k}$ 的鄰近，有

(3) $$G(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu^{(k)} (1-te^{-i\phi_k})^{a_k+\nu b_k}, \qquad k=1,2,\cdots,r$$

此处 $b_k>0$．則展开式

(4) $$\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{r} c_\nu^{(k)} \binom{a_k+\nu b_k}{n} (-e^{-i\phi_k})^n$$

在下述意义下，將是 g_n 的漸近展开式：如 Q 为一任意正数，并設在

(4)中取足夠多的項,則得一展开式,在$n\to\infty$时逼近于g_n,其誤差为$O(n^{-q})$.

任一有限的收斂半徑R都可借变換$t=Ru$而化为1. Darboux的方法也可以適用于对数奇点的情形. 但收斂圓上指数奇点的情形就很困难. 这曾由 Perron, Faber, Häusler 及近代的 Wright (1932, 1933, 1949) 研究过, Wright 还列出了早期文献的參考目錄.

Darboux 的方法很成功地应用在經典正交多項式及某些算術函数的漸近性态研究中. 如果母函数是整函数,則在很多情形下,可求得另一母級数,仍具有有限的收斂半徑. 例如,偶次漢米特多項式可由 19-4(8) 生成,也可由 19-4(20) 生成,而 Darboux 方法可应用于后一母函数,但不能应用于前者.

母函数为整函数的情形曾由許多作者研究过. 在早期的一些作者中,較为重要的著作是 Barnes, Lindelöf, Watson 等的作品. Ford (1936) 就所有結果作了彙集,并參考到 1936 年前的大部分文献, Wright 則列出了最近文献的目錄,可供參考.

第二部分: 公式

下面的目錄無法企求完备,目錄中母函数的次序以其复雜程度为先后. 我們制定了函数的一个"体系",标明于節目之中. 列在一節中的每一母函数,相当于它的"最高級"函数. 我們这里沒有字母次序,但在編制目錄时,以下面的原則作为指導,依此可帮助讀者找到所需的結果. 我們把一个參变数的函数看作是比主变数x或t的类似函数更为基本的函数,因此,$(1+t)^x$將放在$(1-2xt+t^2)^{-\nu}$的后面. 我們把一代数函数的積及一指数函数的積看作是更基本的函数,放在代数函数的指数函数之前.

在每一开头的地方,几乎都附有參考文献. 这些文献僅是根

据方便选摘，既不是介紹所論母函数的專論，也不是最近或最完备的來源。

这里沒有列入数論的母函数，关于这一方面可参看第17章。組合分析中的母函数也沒有列入。

19-6. 有理函数与代数函数．一般冪

(1) $$\frac{1-t^2}{1-2tx+t^2}=1+2\sum_{n=1}^{\infty}T_n(x)t^n,$$

此处 $T_n(x)$ 是第10章的車比雪夫多項式。

(2) $$(1-t)^{-k-1}(1-xt)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}g_n^{(k)}(x)t^n, \qquad k=0,1,2,\cdots$$

(3) $$g_n^{(k)}(x)=\sum_{m=0}^{n}(-1)^{n-m}\binom{k-1}{n-m}x^m,$$

此处 $g_n^{(k)}(x)$ 是級数

$$1+x+x^2+\cdots$$

的前 n 个部分和的第 k 次 Cesáro 均值 (关于应用，見 Obrechkoff, 1934)。

(4) $$(1-2tx+t^2)^{-1/2}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n,$$

此处 $P_n(x)$ 为勒上特多項式(見第10章)。

(5) $$\frac{(1-x^2)^{1/2}}{1-2tx+t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}U_{n+1}(x)t^n,$$

此处 U_{n+1} 为第二类車比雪夫多項式(見第10章)。

(6) $$\frac{1-t^2}{(1-2tx+t^2)^{3/2}}=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)P_n(x)t^n,$$

其中 $P_n(x)$ 为第10章的勒上特多項式。

(7) $$(1-3xt+t^3)^{-1/3}=\sum_{n=0}^{\infty}g_n(x)t^n,$$

g_n 的若干遞推关系及一个三次綫性齐次微分方程曾由 Pincherle (1889) 導出。P. Humbert (1920)曾研究过 $(1-3xt+t^3)^{-\nu}$ 所生

成的多項式.

(8) $$\frac{1+t}{(1-t)^k(1-2xt+t^2)^{1/2}}=\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)t^n,$$

(9) $$g_n(x)=\sum_{\nu=0}^{n} \frac{\Gamma(k+n-\nu+1)(2\nu+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(n-\nu+1)} P_\nu(x)$$

其中 $P_\nu(x)$ 为 ν 次勒上特多項式,且 $\operatorname{Re} k>-1$. 它在拉普拉斯与勒上特級数求和問題上的应用見 Gronwall (1914).

(10) $$t^{-1}(1-t)^{-k}\left[\frac{1+t}{(1-2xt+t^2)^{1/2}}-1\right]=\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)t^n,$$

(11) $$g_n(x)=\sum_{\nu=0}^{n} \frac{\Gamma(k+n-\nu)}{\Gamma(k)\Gamma(n+1-\nu)} [P_\nu(x)+P_{\nu+1}(x)].$$

关于应用,可参看 Gronwall (1914); 并与(8)比較.

(12) $$(1-2xt+t^2)^{-\nu}=\sum_{n=0}^{\infty} C_n^\nu(x)t^n$$

式中 C_n^ν 为蓋根堡多項式,見第10章, 11–1–2 節及 Gegenbauer (1874).

設 $w=(1-2xt+t^2)^{1/2}$, 則

(13) $$\frac{2^\alpha}{w(1-xt+w)^\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+\alpha)_n}{(2\alpha+1)_n} C_n^{1/2+\alpha}(x)t^n$$

其中 C_n^ν 为第10章的蓋根堡多項式,并見(12)及 Szegö (1939).

(14) $$(1-3xt+3yt^2-t^3)^{-\nu}=\sum_{n=0}^{\infty} H_n^\nu(x,y)t^n.$$

H_n^ν 的常微分方程及偏微分方程曾由 Devisme (1932, 1933)導出.

(15) $$[1-x^m+(x-t)^m]^{-\nu}=\sum_{n=0}^{\infty} {}_mc_n^\nu(x)t^n.$$

关于 ${}_mc_n^\nu$ 的研究見 Devisme (1936).

(16) $$(1-t)^{b-c}(1-t+xt)^{-b}=\sum_{n=0}^{\infty} (c)_n F(-n,b;c;x)t^n/n!$$

記法見 2–1 節. 应用(物理上的)見 Gordon (1929).

設 $w=(1-2tx+t^2)^{1/2}$, 則

(17) $2^{\alpha+\beta}w^{-1}(1-t+w)^{-\alpha}(1+t+w)^{-\beta}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)t^n$

(18) $=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha+1)_n}{n!}F(\alpha+\beta+n+1,\ -n;\ \alpha+1;\ \tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}x)t^n,$

其中 $P_n^{(\alpha,\beta)}$ 为雅可比多項式(見第10章及2·5·1節，中有公式的証明).

(19) $(1+t)^x=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{x}{n}t^n$

其中

(20) $\binom{x}{n}=\frac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n!}$ $n=1,2,3,\cdots$

(21) $\binom{x}{0}=1,$

都是 x 的二項式多項式. 方程(19)是有名的二項式定理，曾由 Abel 在1826年作了嚴格的証明.

(22) $\left(\frac{1+t}{1-t}\right)^x=\sum_{n=0}^{\infty}g_n(x)t^n.$

(23) $g_n(x)=\frac{(x)_n}{n!}F(-n,\ -x;\ 1-n-x;\ -1)$

(24) $=2xF(1-n,\ 1-x;\ 2;\ 2)$ $n\geqslant 1.$

記法見2–1節. 参考文献: Mittag-Leffler (1891), Bateman (1940). 母函数是廣义 Appell 型 19–3(13), $A(t)=1$,

(25) $\left(\frac{1+t}{1-t}\right)^x(1-t)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}g_n(x)t^n.$

以 $A(t)=(1-t)^{-1}$, 从(22)及19–2(37)~19–2(40)可得 $g_n(x)$ 的顯表达式. 应用見 Pidduck (1910, 1912).

(26) $(2xt)^{-q}\left[\left(\frac{1+t}{1-t}\right)^x-1\right]^q=\sum_{n=0}^{\infty}g_n(x)t^n$

見 Mittag-Leffler (1891).

(27) $[1+\beta t(\alpha_0+\alpha_1 t+\cdots+\alpha_k t^k)]^{x/\beta}=\sum_{n=0}^{\infty}g_n(x)t^n.$

$g_n(x)$ 满足函数方程

(28) $$g_n(x+y)=\sum_{r=0}^{n} g_r(x)g_{n-r}(y),$$

(28)式的每一个解用多项式表示时可从下面的母函数中經適当选定常数 $\beta, \alpha_0, \alpha_1, \cdots$ 而求得:

$$\left(1+\beta t\sum_{m=0}^{\infty}\alpha_m t^m\right)^{x/\beta}.$$

参考文献: René Lagrange (1928). 母函数是屬于廣义 Appell 型 19-3(13) 的.

設 $G=G(x,t)$ 为方程

(29) $$1+xG-(1+G)^x=xt^2$$

的根,具有展开式

(30) $$G(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)t^n/n!.$$

則

(31) $$g_n(x)=\left\{\frac{\partial^{n-1}}{\partial G^{n-1}}\left[\frac{1+xG-(G+1)^x}{xG^2}\right]^{-\frac{1}{2}n}\right\}_{G=0}$$

且 $g_1=2^{\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}$. Barnes (1906) 应用这一 $g_n(x)$ 来研究

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(1+nx)}{n!}z^n$$

在 $z\to\infty$ 时的漸近性态.

19-7. 指数函数

(1) $$(t-1)^m e^{xt}=\sum_{n=-m}^{\infty} x^m L_m^n(x)\, m!\, t^{n+m}/(m+n)!$$

其中 L_m^n 为第 10 章的拉甘尔多项式;并見 Truesdell (1948).

(2) $$\exp(2xt-t^2)=\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)t^n/n!$$

此处 H_n 为第 10 章的漢米特多項式.

(3) $(1-t)^{-1}\exp\dfrac{x^2t(t-2)}{(1-t)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}g_{2n}(x)t^n$

(4) $g_{2n}(x)=\dfrac{e^{x^2}}{n!}\dfrac{d^n}{dx^n}(x^ne^{-x^2})$

(見 Humbert, 1923). $g_{2n}(x)$具有如下性質:

$$\int_0^{\infty}e^{-x^2}x^sg_{2n}(x)\,dx=\int_{-\infty}^0e^{-x^2}x^sg_{2n}(x)\,dx=0$$

$$s=0,1,2,\cdots,n-1$$

(5) $\exp[\tfrac{1}{2}x(t-t^{-1})]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x)t^n,$

其中 $J_n(x)$ 为第一类貝塞尔函数(見第7章).

(6) $\exp\{x[u+t-(ut)^{-1}]/3\}=\sum_{n,m=-\infty}^{\infty}J_{n,m}(x)u^mt^n.$

(7) $J_{n,m}(x)$

$$=\frac{x^{n+m}}{3^{n+m}\Gamma(n+1)\Gamma(m+1)}\,{}_0F_2(m+1,n+1;-x^3/27)$$

其中 ${}_0F_2$ 为廣义超比級数(見4-1節). n,m 如为負数,則(7)式右側应为

(8) $(x/3)^{n+m}\sum_{l=0}^{\infty}\dfrac{(-x/3)^{3l}}{\Gamma(l+1+n)\Gamma(l+1+m)}.$

关于証明及在方程

(9) $\dfrac{\partial^3U}{\partial x^3}+\dfrac{\partial^3U}{\partial y^3}+\dfrac{\partial^3U}{\partial z^3}-3\dfrac{\partial^3U}{\partial x\partial y\partial z}+U=0$

上的应用,見 P. Humbert (1930).

(10) $\exp[(t^2-uv)x-t^3/3]=\sum_{l,m,n=0}^{\infty}t^lu^mv^nP_{l,m,n}(n)$

見 Devisme (1932, 1933).

(11) $(1+4t^2)^{-3/2}(1+2xt+4t^2)\exp\left(\dfrac{4x^2t^2}{1+4t^2}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}H_n(x)\dfrac{t^n}{l!}$

此处,如 n 为偶数,則 $l=\frac{1}{2}n$, 如 n 为奇数,則 $l=\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}$. H_n 为第10章的漢米特多項式;并見(2)及 Szegö (1939).

(12)　$$(1-t^2)^{-1/2}\exp\left(\frac{2x^2t}{1+t}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}[H_n(x)]^2\frac{(\frac{1}{2}t)^n}{n!}$$

其中 H_n 为 (2) 的漢米特多項式[見第 10 章及 Tchebycheff (1889)].

(13)　$$(1-t)^{-\alpha-1}\exp\left(-\frac{xt}{1-t}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}L_n^{\alpha}(x)t^n,$$

其中 $L_n^{\alpha}(x)$ 为第 10 章的廣义拉甘尔多項式,并見 Szegö (1939).

(14)　$$\exp\left[x\frac{(1-t^2)^{1/2}-1}{t}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}g_n(x)t^n$$

(15)　$$g_n(x)=(-\tfrac{1}{2}x)^n(n-1)!\sum_{l=0}^{[\frac{1}{2}n]}\frac{x^{-2l}}{l!(n-l)!(n-2l-1)!}$$

(16)　$$=(n!)^{-1}(-\tfrac{1}{2}x)^n{}_3F_0(-n,\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}n,1-\tfrac{1}{2}n;-4x^{-2})$$

式中 $[\frac{1}{2}n]$ 在 n 为偶数时 $=\frac{1}{2}n$, 在 n 为奇数时 $=\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}$, ${}_3F_0$ 为廣义超比級数,記法見 4-1 節. 关于它在电子理論中的应用,見 Mott (1932).

(17)　$$(1-2xt)^{-1/2}\exp\{x^{-1}[1-(1-2xt)^{1/2}]\}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}{}_2F_0(-n,n+1;-\tfrac{1}{2}x)t^n/n!$$

式中 ${}_2F_0$ 表貝塞尔多項式,見 (18), (19) 及 Krall-Frink (1949), Burchnall (1951).

(18)　$$(1-2xt)^{-1/2}[\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}(1-2xt)^{1/2}]^{2-a}$$
$$\times\exp\{\tfrac{1}{2}bx^{-1}[1-(1-2tx)^{1/2}]\}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}y_n(x,a,b)t^n/n!$$

其中 $y_n(x,a,b)$ 由 Krall-Frink (1949) 称之为**廣义貝塞尔多項式**,滿足复数 x-平面的單位圓上的正交性关系. 关于 (18) 式的証明見 Burchnall (1951). 顯表示式为:

(19)　$$y_n(x,a,b)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n+k+a-2}{k}k!\left(\frac{x}{b}\right)^k$$
$$={}_2F_0(-n,a-1+n;-x/b).$$

(20) $y_n(bx, a, b) = x^{1-\frac{1}{2}a} e^{1/(2x)} W_{1-\frac{1}{2}a,\, n-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a}(x^{-1})$.

記法: ${}_2F_0$ 見第 4 章; W 見第 6 章; 并見 4-7 節及(17).

(21) $(1-t)^{\beta} \exp\left(\frac{x}{1-t}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x) t^n$,

(22) $g_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m-\beta)_n}{n!\,m!} x^m = e^x L_n^{-\beta-1}(-x)$

記法見 (13) 及 2 1, 6-9-2 節, $L_n^{-\beta-1}$ 为廣义拉甘尔多項式, 参看 Wright (1932).

(23) $\frac{te^{xt}}{e^t-1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) t^n/n!$

(24) $\frac{2e^{xt}}{e^t+1} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n(x) t^n/n!$

其中 $B_n(x)$ 表 n 次柏努利多項式, $E_n(x)$ 表 n 次欧拉多項式. 設

(25) $B_n = B_n(0)$

(26) $E_n = 2^n E_n(\frac{1}{2})$

此处 B_n 表柏努利数(見第 1 章), E_n 表欧拉数.

(27) $B_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} B_\nu x^{n-\nu}$

(28) $E_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} 2^{-\nu} E_\nu (x-\frac{1}{2})^{n-\nu}$.

关于各种有关文献、很多結果及应用, 可参看 Fort (1948), Nörlund (1924). 关于其推廣, 見 (30), (34)-(37) 及 (57).

(29) $\frac{e^{tx}-1}{e^t-1} = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x) t^n$,

此处 $g_n(x)$ 与柏努利多項式密切相关[关于其推廣及应用, 見 (23), Hermite (1878), Berger (1888)].

(30) $\frac{t^l e^{xt}}{(e^t-1)^l} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(l)}(x) t^n/n!$

此处 $B_n^{(l)}(x)$ 称为廣义柏努利多項式. 見 (23) 及 Nörlund (1920.

1924). 有几个特例为:

(31) $B_n^{(n)}(x)=\int_x^{x+1}(s-1)(s-2)\cdots(s-n)ds,$

(32) $B_n^{(l+1)}(x)=\frac{n!}{l!}\frac{d^{l-n}}{dx^{l-n}}(x-1)(x-2)\cdots(x-n)\qquad l\geqslant n$

$$B_n^{(l)}(x+y)=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}x(x-1)\cdots(x-r+1)B_{n-r}^{(l-r)}(y)$$

(33) $2te^{tx}\left(\frac{p+t}{p-t}e^{2t}-1\right)^{-1}=\frac{p}{p+1}+\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n^{(p)}(x)t^n/n!$

此处 $\omega_n^{(p)}$ 表 $p\neq 0$ 时 x 的 n 次多項式,如 $p\to\infty$ 则

$$\omega_n^{(p)}(x)\to 2^n B_n(\tfrac{1}{2}x)$$

此处 $B_n(x)$ 为柏努利多項式[見 19-4(3), (23)]. 函数 $\omega_n^{(p)}(x)$ 可展为函数

$$\sin\mu_l x,\quad \cos\mu_l x\qquad l=1, 2, 3, \cdots$$

的級数,此处 μ_l 为方程

$$\mu\cos\mu+p\sin\mu=0$$

的第 l 个实根,至于这一結果及其他結果的説明以及关于它在热傳導問題上的应用,可参看 Koshliakov (1935).

(34) $\frac{(e^{\omega_1 t}-1)\cdots(e^{\omega_l t}-1)}{\omega_1\cdots\omega_l t^l}e^{xt}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n^{(l)}(x|\omega_1,\cdots,\omega_l)t^n/n!$

(35) $2^{-l}(e^{\omega_1 t}+1)\cdots(e^{\omega_l t}+1)e^{xt}=\sum_{n=0}^{\infty}E_n^{(-l)}(x|\omega_1,\cdots,\omega_l)t^n/n!$

(36) $\frac{\omega_1\cdots\omega_l t^l}{(e^{\omega_1 t}-1)\cdots(e^{\omega_l t}-1)}e^{xt}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n^{(l)}(x|\omega_1,\cdots,\omega_l)t^n/n!$

(37) $\frac{2^l e^x}{(e^{\omega_1 t}+1)\cdots(e^{\omega_l t}+1)}=\sum_{n=0}^{\infty}E_n^{(l)}(x|\omega_1,\cdots,\omega_l)t^n/n!$

$$l=1, 2, 3, \cdots$$

式中 $B_n^{(-l)}$ 及 $B_n^{(l)}$ 表 $-l$ 階及 l 階柏努利多項式. $E_n^{(-l)}$ 及 $E_n^{(l)}$ 則表对应的高階欧拉多項式. 这些多項式的結果及应用可見 Nörlund (1920, 1924).

(38) $(e^{xt}-1)t^{\nu}(e^{t}-1)^{-\nu}=\sum_{n=0}^{\infty}\Phi_{\nu,\,n+1}(x)t^{n}$

(39) $(e^{xt}-1)t^{-\nu-2}(e^{t}-1)^{\nu+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\Psi_{\nu,\,n+1}(x)t^{n}.$

Imschenetzky (1884) 研究了 $\Phi_{\nu,\,n+1}$, $\Psi_{\nu,\,n+1}$, $\nu=0, 1, 2, \cdots$. 它們与 (34)-(37) 中的廣义柏努利多項式及廣义欧拉多項式密切相关,并見 Nörlund (1924).

(40) $\exp[x(1+t-e^{t})]=\sum_{n=0}^{\infty}g_{n}(x)t^{n}/n!$

Mahler (1930) 用 $g_n(x)$ 來研究不完全 γ-函数的零点 [見第 9 章及 (41), (46)].

(41) $\exp[\alpha t+x(1-e^{t})]=\sum_{n=0}^{\infty}g_{n}^{(\alpha)}(x)t^{n}/n!$

式中的 $g_n^{(\alpha)}$ 曾由 Toscano (1950) 研究过. 与之有关的是 Hilb (1922) 及 Mahler (1930) 所研究的函数, 分别見 (46) 及 (40). Toscano (1930) 列出了早期的参考文献,其中 $g_n^{(\alpha)}$ 的引進是与統計数学問題有关的. Toscano (1930) 的一些結果是:

(42) $g_{n}^{(\alpha+1)}(\alpha)-g_{n}^{(\alpha)}(x)=-\frac{d}{dx}\,g_{n}^{(\alpha)}(x).$

方程 (42) 給出了 $g_n^{(\alpha)}$ 与 Truesdell (1948) 的函数方程的关系. $g_n^{(\alpha)}(x)$ 是 x 及 α 的 n 次多項式:

(43) $g_{n}^{(\alpha)}(x)=x^{-\alpha}e^{x}\left(x\frac{d}{dx}\right)^{n}x^{\alpha}e^{-x}.$

如 Δ_α 为下式所定义的差分算符:

(44) $\Delta_{\alpha}f(\alpha)=f(\alpha+1)-f(\alpha).$

則

(45) $g_{n}^{(\alpha)}(x)=[\exp(-x\Delta_{\alpha})]\alpha^{n}=\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^{m}}{m!}x^{m}\Delta_{\alpha}^{m}\alpha^{n}.$

Toscano 給出了 $g_n^{(\alpha)}(x)$ 展为拉甘尔多項式 L_m^{β} (見第 10 章)級数的展开式,并証明了下列積分关系:

$$\int_0^\infty e^{-x}x^{\frac{1}{2}\alpha}J_\alpha[2(xu)^{\frac{1}{2}}]g_n^{(\beta)}(x)\,dx=(-1)^n u^{\frac{1}{2}\alpha}e^{-u}g_n^{(\alpha-\beta+1)}(u).$$

Whittaker & Watson (1935, p. 336) 研究了关系式

$$e^x g_n^{(\alpha)}(-x)=\sum_{m=0}^\infty (\alpha+m)^n x^m/m!.$$

(46) $\exp(e^t-tx)\int_t^\infty \exp(sx-e^s)\,ds=\sum_{n=0}^\infty g_n(x)t^n,$

Hilb (1922) 曾应用 $g_n(x)$ 來構造函数方程

(47) $u(x+1)-xu(x)=h(x)$

的一个解，此处 $h(x)$ 是已知的．Hilb 証明，在某些 $h(x)$ 的条件下，

(48) $\sum_{n=0}^\infty g_n(x)h^{(n)}(x)=u(x)$

是方程(47)的一个解．此处 $h^{(0)}=h(x)$，而 $h^{(n)}$ 为 $h(x)$ 的 n 階導数．

(49) $e^{-t}(1+a^{-1}t)^x=\sum_{n=0}^\infty a^{-\frac{1}{2}n}(n!)^{-\frac{1}{2}}p_n(x)t^n,$

此处 $p_n(x)$ 表第 10 章中的 Poisson-Charlier 多項式，幷見 Szegö (1939).

(50) $(1-t)^{-x}e^{tx}=\exp[x(2t+t^2/2+t^3/3+\cdots)]$

$$=\sum_{n=0}^\infty g_n(x)t^n,$$

此处 $g_n(x)$ 表廣义 Appell 型 19-3(13) 的多項式集合．应用 2-1 節的記法，有

(51) $g_n(x)=\sum_{l=0}^n \frac{x^{n-l}(x)_l}{(n-l)!\,l!}=\frac{x^n}{n!}{}_2F_0(-n,x;-x^{-1}).$

Sylvester (1879) 研究了这个 $g_n(x)$，幷証明数 $g_n(\frac{1}{4})$ 可用以計算 $2n$ 次反号对称矩陣的行列式中不同項的数目．同样，$g_n(\frac{1}{8})$ 可用以計算关于二对角綫都成反号对称的 $4n$ 次行列式中的不同項数目．

(52) $(1+t)^{-x}e^{x(t-\frac{1}{2}t^2)}=\exp\left[x(-t^3/3+t^4/4-\cdots)\right]$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}g_n(x)t^n.$$

此处 $g_n(x)$ 是 19–3(13) 型的廣义 Appell 集，与漢米特多項式（見第 10 章）有关．它在漢米特多項式漸近性态問題上的应用及結果可参看 Van Veen (1931)．

(53) $(1-t^2)^{-\frac{1}{2}c}\left(\dfrac{1+t}{1-t}\right)^x e^{-2xt}$

$$=(1-t^2)^{-\frac{1}{2}c}\exp\left[x(t^2/2+t^3/3+\cdots)\right]=\sum_{n=0}^{\infty}g_n(x)t^n.$$

此处 $g_n(x)$ 是 19–3(13) 型的多項式的廣义 Appell 集．系 Tricomi (1949) 在研究拉甘尔多項式（見第 10 章）的漸近性态时所引進．基本遞推关系为：

(54) $(n+1)g_{n+1}=(n+c-1)g_{n-1}+2xg_{n-2}.$

(55) $e^{-x}(1+xt)^{1/t}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n A_n(x)t^n,$

此处 $A_n(x)$ 有时称为 Appell 多項式．与 19–3(13) 式所定义的 $g_n(x)$ 的一个特例有关．因为，如令

$$e^{-x}(1+xt)^{1/t}=\exp\{x[s^{-1}\log(1+s)-1]\}\qquad s=xt,$$

则

(56) $\dfrac{dA_n}{dx}=xA_{n-1}+x^2A_{n-2}+\cdots,\ A_n(x)=x^{n+1}\sum_{m=1}^{n}P_m x^{m-1},$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{n}P_m=e^{-1}.$$

数 P_m 可供数論函数計算之用［見 Appell, 1880］．

(57) $\left(\dfrac{t}{e^t-1}\right)^x=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{B_n^{(x)}}{n!}t^n,$

此处 $B_n^{(x)}$ 是 Bernoulli 数［見第 1 章及(25)］的推廣；$B_n^{(x)}$ 是 x 的 n 次多項式，是 R. Lagrange (1928) 多項式的一个特例［参看 19–6(27)］．其他母函数見 19–8(6)；理論及应用見 Nörlund (1920,

1924). 从 $B_n^{(x)}$ 稍經修正后[見(58)]可得 Stirling 多項式.

$$(58)\quad \left(\frac{1-e^{-t}}{t}\right)^{-x-1}=1+(x+1)\sum_{n=0}^{\infty}\psi_n(x)t^{n+1},$$

此处 $\psi_n(x)$ 称为 Stirling 多項式. 它与 Stirling 数 $C_n^{(r)}$ 及 $\mathfrak{C}_n^{(r)}$ 的关系为:

$$(59)\quad C_{n+1}^{(r)}=\frac{(n+1)!}{(n-r)!}\psi_{r-1}(n)\qquad r=1,2,3,\cdots$$

$$(60)\quad \mathfrak{C}_{n+1}^{(r)}=\frac{(-1)^{r+1}(n+r)!}{(n-1)!}\psi_{r-1}(-n-1),$$

此处, $\psi_0=\frac{1}{2}$, Stirling 数可由下述公式独立地定义:

$$(61)\quad (t)_n=\sum_{r=0}^{n-1}C_n^{(r)}t^{n-r}\qquad C_n^{(0)}=1$$

$$(62)\quad \frac{1}{(t)_n}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r\mathfrak{C}_n^{(r)}}{t^{n+r}}\qquad \mathfrak{C}_n^{(0)}=1$$

$$(63)\quad t^n=-\sum_{r=0}^{n-1}\mathfrak{C}_{n-r+1}^{(r)}(-t)_r.$$

$(t)_n$ 的定义見 2–1 節. 參考: N. Nielsen (1906); Nörlund (1924). 并見(57)及 19–8(7).

$$(64)\quad (1-t)^{-\frac{1}{2}}\exp\{x[(1-t)^{-\frac{1}{2}}-1]\}=\sum_{n=0}^{\infty}g_n(x)t^n$$

$$(65)\quad g_n(x)=(n!)^{-1}xe^{-x}\left[\frac{d}{d(x^2)}\right]^n(x^{2n-1}e^x)$$

$$(66)\quad (1-t)^{-\frac{3}{2}}\exp\{x[(1-t)^{-\frac{1}{2}}-1]\}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)!\,p_n(x)t^n/(2^n n!)^2$$

$$(67)\quad p_n(x)=\frac{\pi^{\frac{1}{2}}e^{-x}}{2x\Gamma(n+3/2)}\left[\frac{d}{d(x^2)}\right]^n(x^{2n+1}e^x).$$

关于 (65), (67) 中的 g_n, p_n 在双曲型微分方程理論方面的应用, 可參看 Courant-Hilbert (1937), pp. 391–398.

19.8. 对数函数,三角函数,反三角函数,其他初等函数及其積分

(1) $$\frac{1-(1-t)^x}{\log(1-t)}=\sum_{n=0}^{\infty} g_{n+1}(x)t^n$$

(2) $$g_{n+1}(x)=(n!)^{-1}\int_0^x u(1-u)\cdots(n-1-u)\,du$$

見 Appell (1929), Jordan (1929) 及 19-6(19), 19-10(14). 可应用于 $\Sigma n^{-\lambda}$ 的計算上.

(3) $$[-\log(1-t)]^{\kappa}(1-t)^{-x}=\sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(\kappa)}(x)t^n/n! \qquad \kappa=1,2,3,\cdots$$

Narumi(1929)研究过 $A_n^{(\kappa)}$ 在 $n\to\infty$ 时的漸近性态. 此处, $A_n^{(\kappa)}(x)$ 是

$$\frac{\Gamma(n+t+x)}{\Gamma(n+t)}$$

展为 t 的冪級数中 $t^{\kappa}/\kappa!$ 的系数. 可用以証明定理: 在單位圓 $|z|<1$ 上正則的函数在 $|z|=1$ 上恰具有一个具有規定位置 $(z=1)$ 及类型的奇点.

(4) $$[1-x\log(1+t)]^{-\nu}=\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)t^n$$

(5) $$g_n(x)=\frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^{\infty}\binom{\lambda x}{n}e^{-\lambda}\lambda^{\nu-1}\,d\lambda \qquad \operatorname{Re}\nu>0$$

此处 $\binom{\lambda x}{n}$ 为 λx 的 n 次二項式多項式 19-6(19)[見 Lerch (1905)].

(6) $$[t^{-1}\log(1+t)]^x=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n^{(x+n)}}{x+n}\frac{t^n}{n!}$$

此处 $B_n^{(x)}$ 以 19-7(57) 定义;見 Nörlund (1920, 1924).

(7) $$[-t^{-1}\log(1-t)]^x=1+xt\sum_{n=0}^{\infty}\psi_n(x+n)t^n,$$

此处 ψ_n 为 Stirling 多項式;見 19-7(58) 及 Nielsen (1906).

(8) $$kte^{xt}\csc(kt)=\sum_{n=0}^{\infty}g_n(x,k)t^n.$$

如 n 为偶数,命 $[\frac{1}{2}n]=\frac{1}{2}n$, 如 n 为奇数,则命 $[\frac{1}{2}n]=\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}$. 設常数 b_{2n} 定义为

(9) $$\sum_{n=0}^{\infty}b_{2n}t^{2n}=t\operatorname{sech}t.$$

則

(10) $$g_n(x,k)=\sum_{m=0}^{[\frac{1}{2}n]}b_{2m}\frac{k^{2m}x^{n-2m}}{(n-2m)!}.$$

关于这一結果以及它在向一个已知其平均值及導数的函数逼近問題方面的应用,可参看 Léauté (1881). 对于 $-k<x<k$, Appell (1897) 証明

$$g_{2m}(x,k)=2(-1)^m k^{2m}\pi^{-2m}\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^{l-1}l^{-2m}\cos(l\pi x/k),\ m>0,$$

$$g_{2m+1}(x,k)=2(-1)^m k^{2m+1}\pi^{-2m-1}\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^{l-1}l^{-2m-1}\sin(l\pi x/k).$$

g_n 与 19-7(23) 式的 Bernoulli 多項式有关.

$$g_n(x,h)=\frac{(2k)^n}{n!}B_n\left(\frac{x+k}{2k}\right)$$

(11) $$\frac{\sinh xt}{\sinh t}=\sum_{n=0}^{\infty}g_n(x)t^n.$$

这一式可化成 19-7(23) 式 (Bernoulli 多項式). Whittaker (1933) 將它应用于解析函数的二点展开上.

$$g_n(x)=\frac{2^n}{(n+1)!}\left[B_n\left(\frac{1+x}{2}\right)-B_n\left(\frac{1-x}{2}\right)\right].$$

(12) $$\frac{\cosh(xt)}{\cosh t}=\sum_{n=0}^{\infty}g_n(x)t^n,$$

此处的 g_n 与欧拉多項式有关[見 19-7(24) 及 Whittaker (1933)].

(13) $$(\tfrac{1}{2}\pi x)^{-1/2}\cos(x^2-2xt)^{1/2}=\sum_{n=0}^{\infty}J_{n-1/2}(x)t^n/n!$$

(14) $(\frac{1}{2}\pi x)^{-\frac{1}{2}}\sin(x^2-2xt)^{\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}J_{\frac{1}{2}-n}(x)t^n/n!$

此处 $J_\nu(x)$ 为 ν 階第一类貝塞尔函数（記法見第 7 章）. 参考文献：Glaisher (1873).

(15) $(\cos t)^x=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x)t^n,$

(16) $(t^{-1}\sin t)^x=\sum_{n=0}^{\infty}s_n(x)t^n.$

关于它在 Bernoulli 数理論上的应用以及 c_n, s_n 的其他性質見 Nielsen (1914), Nörlund (1920, 1924) 及 19-7(57).

(17) $\exp(x\tan^{-1}t)=\left(\frac{1+it}{1-it}\right)^{-\frac{1}{2}ix}$

見 19-6(22).

(18) $\exp(x\sin^{-1}t)=\sum_{n=0}^{\infty}g_n(x)t^n.$

(19) $g_0(x)=1,\quad g_1(x)=x$

(20) $g_{2k}(x)=\frac{1}{(2k)!}x^2(x^2+2^2)(x^2+4^2)\cdots[x^2+(2k-2)^2]$

(21) $g_{2k+1}(x)=\frac{1}{(2k+1)!}x(x^2+1^2)(x^2+3^2)\cdots[x^2+(2k-1)^2].$

这是 19-3(13) 型的一个廣义 Appell 集，其中 $A(t)=1$. 如命 $\sin\phi=t$, 并將(18)对 ϕ 微分，卽可得 $g_n(x)$ 的顯式.

(22) $\exp\left[\int_1^t s^{-1}(1+s)^x(1-s)^{-x}ds\right]=\sum_{n=0}^{\infty}g_n(x)t^n,$

見 Mittag-Leffler (1901) 及 19-6(22).

(23) $\exp\left\{m\int_0^t\left[\left(\frac{1+s}{1-s}\right)^x-1\right]\frac{ds}{s}\right\}=\sum_{n=0}^{\infty}g_n^m(x)t^n$

見 Mittag-Leffler (1901).

(24) $e^x\int_{1-t}^{1}e^{-x/u}u^{\frac{1}{2}}du=-t\sum_{n=0}^{\infty}g_n(x)t^n.$

見 Rogowski (1932)

(25) $$\prod_{l=1}^{\infty}(1+tx^l)=\sum_{n=0}^{\infty}g_n(x)t^n \qquad |x|<1$$

(26) $$g_n(x)=x^{\frac{1}{2}(n+1)n}\prod_{l=1}^{n}(1-x^l)^{-1}$$

关于各种結果及其在几率論中的应用,見 Oettinger (1867).

19-9. 貝塞尔函数,合流超比函数（包括其特殊情形如抛物柱函数等）

本節中,貝塞尔函数用第 7 章的記法,合流超比函数及其特殊情形用第 6, 8 章的記法。

(1) $$J_0\{[(x^2-2xt)]^{\frac{1}{2}}\}=\sum_{n=0}^{\infty}J_n(x)t^n/n!$$

見第 7 章及 Truesdell (1948).

(2) $$(x+t)^{-\frac{1}{2}\alpha}J_\alpha[2(x+t)^{\frac{1}{2}}]=\sum_{n=0}^{\infty}x^{-\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}n}J_{\alpha+n}(x)(-t)^n/n!$$

見 Truesdell (1948).

(3) $$(x+t)^{\frac{1}{2}\alpha}J_\alpha[2(x+t)^{\frac{1}{2}}]=\sum_{n=0}^{\infty}x^{\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}n}J_{\alpha-n}(x)t^n/n!$$

見 Truesdell (1948).

(4) $$e^{xt}J_0[t(1-x^2)^{\frac{1}{2}}]=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n/n!$$

(5) $$e^tJ_0(tx)=\sum_{n=0}^{\infty}(1-x^2)^{\frac{1}{2}n}P_n[(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}]t^n/n!$$

(6) $$e^tJ_0[2(tx)^{\frac{1}{2}}]=\sum_{n=0}^{\infty}L_n(x)t^n/n!$$

(7) $$I_0[2t(x-1)^{\frac{1}{2}}]I_0[2t(x+1)^{\frac{1}{2}}]=\sum_{n=0}^{\infty}(n!)^{-2}P_n(x)t^n$$

此处 P_n, L_n 表勒上特及拉甘尔多項式(見第 10 章). 应用及參考:关于 (4), (5), (6) 見 Rainville (1945);关于 (7), 見 Bateman (1905).

(8) $$e^t{}_0F_1(1+\alpha;\ -xt)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_n^\alpha(x)}{(1+\alpha)_n}t^n,$$

此处 L_n^α 为第 10 章的廣义拉甘尔多項式，見 Szegö (1939).

(9) $$e^{xt}t^{-\frac{1}{2}\alpha}J_\alpha(2t^{\frac{1}{2}})=\sum_{n=0}^{\infty}x^nL_n^\alpha(x^{-1})t^n/\Gamma(\alpha+n+1),$$

其中 L_n^α 为第 10 章的廣义拉甘尔多項式，并見 Truesdell (1948), p. 2.

(10) $$\begin{aligned} & e^{xt}{}_0F_1(1+\alpha;\ \tfrac{1}{4}t^2(x^2-1)] \\ &= e^{xt}[\tfrac{1}{2}t^2(1-x^2)]^{-\alpha}J_\alpha[t(1-x^2)^{\frac{1}{2}}] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}[(2\alpha+1)_n]^{-1}C_n^{\alpha+\frac{1}{2}}(x)t^n \end{aligned}$$

此处 C_n^ν 为第 10 章的蓋根堡多項式；見 Truesdell (1948).

(11) $$e^t(xt)^{-\frac{1}{2}\alpha}J_\alpha[2(xt)^{\frac{1}{2}}]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_n^\alpha(x)t^n}{\Gamma(n+\alpha+1)}$$

此处 L_n^α 为第 10 章的拉甘尔多項式；見 Szegö (1939).

(12) $$\begin{aligned} & {}_0F_1(1+\alpha;\ \tfrac{1}{2}t(x-1)]{}_0F_1[1+\beta;\ \tfrac{1}{2}t(x+1)] \\ &= \Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)(\tfrac{1}{2}t)^{-\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}\beta}(1-x)^{-\frac{1}{2}\alpha}(1+x)^{-\frac{1}{2}\beta} \\ &\quad \times J_\nu\{[2t(1-x)]^{\frac{1}{2}}\}I_\nu\{[2t(x+1)]^{\frac{1}{2}}\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)t^n}{(1+\alpha)_n(1+\beta)_n}, \end{aligned}$$

此处 $P_n^{(\alpha,\beta)}$ 为雅可比多項式，記法見第 10, 7, 2 章，証明見 Bateman (1905). 如 $\alpha=\beta$，則右側將包含蓋根堡多項式；如 $\alpha=\beta=0$，則 $P_n^{(\alpha,\beta)}$ 为勒上特多項式(見第 10 章)，公式(12)变为

(13) $$D_m(x+t)\exp[\tfrac{1}{4}(2xt+t^2)]=\sum_{n=0}^{m}\binom{m}{n}D_n(x)t^{m-n},$$

此处 D_m $(m=0, 1, 2, \cdots)$ 为抛物柱函数[見 8–2 節及 Prasad (1926)].

(14) $$(1-t)^{-p}{}_1F_1\left(p;\ 1+\alpha;\ -\frac{xt}{1-t}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(p)_nL_n^\alpha(x)}{(1+\alpha)_n}t^n,$$

此处 p 是任意的; L_n^{α} 为第10章的廣义拉甘尔多項式. 参考: Chaundy (1943).

(15) $$(1+4t^2)^{-c}\,{}_1F_1\left(c;\tfrac{1}{2};\frac{4x^2t^2}{1+4t^2}\right)$$
$$+\frac{32ct^3x^3}{3(1+4t^2)^{c+2}}\,{}_1F_1\left(c+1;\frac{5}{2};\frac{4x^2t^2}{1+4t^2}\right)$$
$$+\frac{2xt(1+4t^2-8ct^2)}{(1+4t^2)^{c+1}}\,{}_1F_1\left(c;\frac{3}{2};\frac{4x^2t^2}{1+4t^2}\right)$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(c)_l}{(2l)!}2^{2l}H_n(x)t^n$$

此处,如 n 为偶数, 則 $l=\frac{1}{2}n$, 如 n 为奇数, 則 $l=\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}$, H_n 表第10章的漢米特多項式. 参考: Brafman (1951).

(16) $$e^{-t}\,{}_1F_1(-b,\alpha+1;x+t)$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha+b+1)_n}{(\alpha+1)_n}\,{}_1F_1(-b,\alpha+n+1;x)\frac{(-t)^n}{n!}$$

見 Truesdell (1948).

19-10. γ-函数,勒上特函数及高斯超比函数, 廣义超比函数

这一節中的記法是: Γ, $(a)_n$ 見第1章; F, ${}_2F_1$ 見第2章; P_ν^μ 見第3章; ${}_pF_q$ 見第4章.

(1) $$\frac{\Gamma(m+x+t)}{\Gamma(m+t)}=\sum_{n=0}^{\infty}A_m^{(n)}(x)t^n/n!$$

$A_m^{(n)}$ 的定义見 19-8(3); 并見 Narumi (1929).

(2) $$(1-2tx+t^2)^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu}P_\nu^\mu\left[\frac{x-t}{(1-2xt+t^2)^{\frac{1}{2}}}\right]$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\nu-\mu+n}{n}P_{\nu+n}^{\mu}(x)t^n$$

(3) $$(1-2xt+t^2)^{\frac{1}{2}\nu}P_\nu^\mu\left[\frac{x-t}{(1-2xt+t^2)^{\frac{1}{2}}}\right]$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\nu+n}{n}P_{\nu-n}^{\mu}(x)(-t)^n$$

(4) $[1-t^2-2(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}xt]^{-\frac{1}{2}\mu}P_\nu^\mu[x+t(1-x^2)^{\frac{1}{2}}]$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}P_\nu^{\mu+n}(x)t^n/n!$$

(5) $[1-2t(1-x^2)^{\frac{1}{2}}]^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu}P_\nu\left\{\frac{x}{[1-2t(1-x^2)^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}}}\right\}$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}P_{\nu+n}^n(x)t^n/n!$$

見 Truesdell (1948).

(6) $$R^{-1}P_\nu\left(\frac{1+t}{R}\right)P_\nu\left(\frac{1-t}{R}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(\cos x)F_\nu(-2n-1)t^n$$

其中

(7) $R=(1-2t\cos x+t^2)^{\frac{1}{2}}$,

$F_\nu(z)={}_3F_2(-\nu,\nu+1,\frac{1}{2}+\frac{1}{2}z;1,1;1)$,

此处 P_ν 表勒上特函数; $P_n(n=0,1,2,\cdots)$ 表勒上特多項式(見第 3, 10 章); ${}_3F_2$ 表廣义超比級数(見 4-1-1 節). 參考: Bateman (1934), Rice (1940).

(8) $\frac{1}{1-t}{}_2F_1[\zeta,\frac{1}{2};p;-4xt(1-t)^{-2}]$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}{}_3F_2(-n,n+1,\zeta;1,p;x)t^n,$$

此处 ${}_2F_1$, ${}_3F_2$ 表超比級数及廣义超比級数. 參考: Rice (1940), Fasenmyer (1947); 并見 19-3(27), 19-3(28) 及 4-7 節.

(9) $(1-t)^{-1-\alpha-\beta}{}_2F_1[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\beta,1+\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\beta;1+\alpha;$
$2t(x-1)(1-t)^{-2}]$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+\alpha+\beta)_n}{(1+\alpha)_n}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)t^n$$

(10) $(1+t)^{-1-\alpha-\beta}{}_2F_1[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\beta,1+\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\beta;1+\beta;$
$2t(x+1)(1+t)^{-2}]$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+\alpha+\beta)_n}{(1+\beta)_n}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)t^n$$

此处 $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ 为雅可比多項式；$_2F_1$ 为超比級数，記法見第 2, 10 章，証明見 Watson (1939).

(11) $$(1-xt)^{-p}{}_2F_1[\tfrac{1}{2}p, \tfrac{1}{2}p+\tfrac{1}{2}; 1+\alpha; t^2(x^2-1)(1-xt)^{-2}]$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(p)_n}{(2\alpha+1)_n}C_n^{\alpha+1/2}(x)t^n$$

此处 C_n^ν 为第 10 章的蓋根堡多項式。参考：Brafman (1951). 参数 p 是任意的，如 $\alpha=0$, 則 C_n^ν 变为勒让特多項式.

(12) $$_2F_1(p, 1+\alpha+\beta-p; 1+\alpha; \tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}t-\tfrac{1}{2}w)$$
$$\times{}_2F_1(p, 1+\alpha+\beta-p; 1+\beta; \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}t-\tfrac{1}{2}w)$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(p)_n(1+\alpha+\beta-p)_n}{(1+\alpha)_n(1+\beta)_n}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)t^n,$$

其中 $w=(1-2xt+t^2)^{1/2}$, $P_n^{(\alpha,\beta)}$ 表第 10 章的雅可比多項式，p 为任意参数. 参考：Brafman (1951). 在 $\alpha=\beta$ 及 $\alpha=\beta=0$ 的特殊情形下，生成函数是特种球多項式或蓋根堡多項式的倍数及勒让特多項式的倍数(見第 10 章).

(13) $$[F(a, b; c; -t)]^2e^{xt}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}{}_4F_2\left[\begin{matrix}2a, 2b, a+b, -n; \\ c, 2c-1;\end{matrix}\; x^{-1}\right]t^n,$$

此处 F 为超比級数，見 2–1 節；$_4F_2$ 为廣义超比級数，見 4–1 節. 参考：P. Humbert (1924).

(14) $$\int_0^{-x}F(\alpha, \beta; \gamma; t)\,d\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}g_{n+1}(x)\frac{(\beta)_n}{(\gamma)_n}t^n,$$

此处 F 为超比級数，見第 2–1 節，其应用見 Appell (1929). g_{n+1} 是 19–8(2) 的函数. 設

(15) $$e^t{}_1F_2(a; b_1, b_2; -x^2t^2)=\sum_{n=0}^{\infty}g_n(x)t^n/n!,$$

則对于任一 c, 有

(16) $$(1-t)^{-c}{}_3F_3[\tfrac{1}{2}c, \tfrac{1}{2}c+\tfrac{1}{2}, a; \tfrac{1}{2}, b_1, b_2; -x^2t^2(1-t)^{-2}]$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(c)_n}{n!}g_n(x)t^n.$$

見 Rainville (1947) 及 19–3(19).

(17) $$e^{xt}(1-x^2)^{\frac{1}{2}m}{}_2F_3[m+\tfrac{1}{2}, m+\tfrac{1}{2}; \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}m+\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}m+1; -\tfrac{1}{4}t^2(1-x^2)]$$
$$=\frac{\pi 2^{-m}m!}{\Gamma(m+\frac{1}{2})\Gamma(m+\frac{1}{2})}\sum_{n=0}^{\infty}P_{m+n}^{m}(x)\frac{t^n}{(m+n)!}$$

此处 P_n^m 为第 3 章的勒上特函数; 見 Truesdell (1948).

(18) $$(1-t)^{a-1}{}_2F_0[\tfrac{1}{2}a-\tfrac{1}{2}; \tfrac{1}{2}a; 4xtb^{-1}(1-t)^{-2}]$$
$$\sim\sum_{n=0}^{\infty}y_n(x, a, b)(a-1)_n t^n/n!$$

此处 $y_n(x, a, b)$ 为廣义貝塞尔多項式, 見 19–7(18) (Rainville, 未刊布). 方程(18)是(23)的一个特例.

(19) $$(1-2xt)^{-1}{}_2F_0[1, \tfrac{1}{2}; -4t^2(1-2xt)^{-2}]\sim\sum_{n=0}^{\infty}H_n(x)t^n,$$

此处 H_n 为第 10 章的漢米特多項式. 參考: Rainville (1947).

(20) $$(1-2xt)^{-a}{}_2F_0[\tfrac{1}{2}a, \tfrac{1}{2}a+\tfrac{1}{2}; -4t^2(1-2tx)^{-2}]$$
$$\sim\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{n!}H_n(x)t^n,$$

此处 H_n 为第 10 章的漢米特多項式. 參考: Brafman (1951).

(21) $$\frac{1}{1-t}{}_pF_q\left[\begin{matrix}a_1, \cdots, a_p;\\ b_1, \cdots, b_q;\end{matrix} -\frac{4xt}{(1-t)^2}\right]$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}{}_{p+2}F_{q+2}\left[\begin{matrix}-n, n+1, a_1, \cdots, a_p;\\ \frac{1}{2}, 1, b_1, \cdots, b_q;\end{matrix} x\right]t^n$$

記法見 4–1–1 節. 參看 19–3(27), 19–3(28) 及 Fasenmyer (1947).

(22) $$(1-t)^{-\lambda}{}_{p+1}F_q\left[\begin{matrix}\lambda, a_1, \cdots, a_p\\ \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_q;\end{matrix} -\frac{xt}{1-t}\right]$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda)_n}{n!}{}_{p+1}F_q\left[\begin{matrix}-n, a_1, \cdots, a_p;\\ \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_q;\end{matrix} x\right]t^n.$$

Chaundy (1943).

(23) $$(1-4xt)^{-1/2}2^{c-1}[1+(1-4xt)^{1/2}]^{1-c} \times {}_pF_q\left[\begin{matrix}\alpha_1, \cdots, \alpha_p; & \dfrac{1-(1-4xt)^{1/2}}{2x} \\ \beta_1, \cdots, \beta_q; & \end{matrix}\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty} {}_{q+2}F_p\left[\begin{matrix}-n, c+n, 1-\beta_1-n, \cdots, 1-\beta_q-n; \\ 1-\alpha_1-n, \cdots, 1-\alpha_p-n; \end{matrix} \; (-1)^{p+q+1}x\right]\lambda_n t^n$$

其中

(24) $$\lambda_n=\frac{(\alpha_1)_n(\alpha_2)_n\cdots(\alpha_p)_n}{(\beta_1)_n(\beta_2)_n\cdots(\beta_q)_n}\frac{1}{n!}$$

Rainville (1947).

(25) $$e^t {}_pF_q\left[\begin{matrix}\alpha_1, \cdots \alpha_p; \\ \beta_1, \cdots \beta_q; \end{matrix} \; -xt\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty} {}_{p+1}F_q\left[\begin{matrix}-n, \alpha_1, \cdots, \alpha_p; \\ \beta_1, \cdots, \beta_q; \end{matrix} \; x\right]t^n/n!$$

Rainville (1947).

(26) $$F_4[\gamma, \delta; 1+\alpha, 1+\beta; \tfrac{1}{2}t(x-1), \tfrac{1}{2}t(x+1)]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\gamma)_n(\delta)_n}{(1+\alpha)_n(1+\beta)_n}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)t^n$$

此处 F_4 为二变量的 Appell 超比函数(見第 5 章); $P_n^{(\alpha,\beta)}$ 为第 10 章的雅可比多项式.

19-11. 多变数生成函数

(1) $$(1-xt)^{-\alpha}(1-yt)^{-\beta}=\sum_{n=0}^{\infty}g_n(x, y)t^n,$$

此处 $g_n(x, y)$ 称为拉格郎日多项式.

(2) $$g_n(x, y)=\sum_{r=0}^{n}\frac{(\alpha)_r(\beta)_{n-r}}{r!(n-r)!}x^r y^{n-r}.$$

在統計数学方面的应用及一般參考:見 J. L. Lagrange (1867).

(3) $(1+t)^{\lambda}(1+xt)^{\mu}(1+yt)^{\nu}$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\lambda}{n}F_1(-n,\ -\mu,\ -\nu,\ -n+1;\ x,\ y)t^n,$$

其中 F_1 为二变数 Appell 超比級数(見第5章). 参考: Devisme (1932, 1933).

(4) $$\exp(xy-yt^2+t^3/3)=\sum_{n=0}^{\infty}U_n(x,\ y)t^n.$$

多項式 U_n 的顯表示式(但很复雜)曾由 Devisme (1932, 1933) 導出; 他还給出了这一多項式在偏微分方程

$$\frac{\partial^3 U}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 U}{\partial y^3}+\frac{\partial^3 U}{\partial z^3}-3\frac{\partial^3 U}{\partial x\partial y\partial z}=0$$

及其他有关方程方面的应用.

(5) $$\exp\{i[x(1+t^2)^{1/2}-yt]\}=\sum_{n=0}^{\infty}g_n(x,\ y)t^n$$

(6) $$g_n(x,\ y)=(-iy)^n(\tfrac{1}{2}\pi x)^{1/2}\sum_{k=0}^{[\frac{1}{2}n]}\frac{(\frac{1}{2}x/y^2)^k H^{(1)}_{k-1/2}(x)}{\Gamma(n-2k+1)k!}$$

此处, 如 n 为偶数, 則 $[\frac{1}{2}n]=\frac{1}{2}n$, 如 n 为奇数, 則 $[\frac{1}{2}n]=\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}$, $H^{(1)}_{k-1/2}$ 为 $k-\frac{1}{2}$ 階第一类亨克尔函数, 見 Hall (1936), 在热傳導問題上的应用見 Green (1934).

(7) $[(1-xt-ys)^2+(t^2+s^2)(1-x^2-y^2)]^{-1/2-\alpha}$

$$=\sum_{m,\ n=0}^{\infty}g_{m,\ n}(x,\ y)t^m s^n.$$

命 $p=1-x^2-y^2$, 且設 $\alpha>-\frac{1}{2}$. 則

(8) $$g_{m,\ n}=\frac{(-1)^{m+n}}{2^{m+n}m!n!}\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(2\alpha+m+n+1)}{\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(\alpha+m+n+1)}p^{-\alpha}\times\frac{\partial^{m+n}p^{\alpha+m+n}}{\partial x^m\partial y^n}$$

参看 Koschmieder (1924).

令

(9) $\phi(x,\ y)=ax^2+2bxy+cy^2,\ a>0,\ \Delta=ac-b^2>0,$

$$\Delta\psi(x, y) = cx^2 - 2bxy + ay^2$$
$$\xi = ax + by, \quad \eta = bx + cy.$$

則由

(10) $$\exp[t\xi + s\eta - \tfrac{1}{2}\phi(t, s)] = \sum_{m, n=0}^{\infty} H_{m, n}(x, y) \frac{t^m}{m!} \frac{s^n}{n!}$$

(11) $$\exp[tx + sy - \tfrac{1}{2}\psi(t, s)] = \sum_{m, n=0}^{\infty} G_{m, n}(x, y) \frac{t^m}{m!} \frac{s^n}{n!}$$

所生成的多項式都是二变量漢米特多項式．关于这种多項式的性質以及推廣到更多个变量时的情形見 Appell & Kampé de Férret (1926)．关于这种多項式之積的母函数見 Koschmieder (1937, 1938), Erdélyi (1938).

某些多变量母函数

設 $x_1, \cdots, x_l$ 为变量，并設

(12) $$G_0(t) = \prod_{r=1}^{l} (1 - tx_r) = \sum_{r=0}^{l} (-1)^r s_r t^r.$$

則 $s_0 = 1$, $s_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_l$, s_r 为 $x_1, \cdots, x_l$ 的第 r 次初等对称函数．設 $k = 0, 1, 2, \cdots$, 并令

(13) $$p_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_l^k$$

为变量 k 次方之和．則

(14) $$-\frac{\partial}{\partial t}(\log G_0) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k t^{k-1}.$$

以 G_0 乘(14)式的二边，并比較二边 t 的冪的系数，卽可得牛頓遞推公式，从而能導出以 s_r 表示的 p_k 的表达式．設 $y_k (k = 1, 2, 3, \cdots)$ 代表变数，并設

(15) $$\exp\left[\sum_{k=1}^{\infty} (y_k/k) t^k\right] = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n t^n,$$

則

(16) $$B_n(y_1, \cdots, y_n) = \sum \frac{y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \cdots y_n^{\alpha_n}}{\alpha_1! \alpha_2! \cdots \alpha_n! 1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \cdots n^{\alpha_n}}$$

此处和式过所有的非負整数 $a_1, \cdots, a_n$, 而

(17) $a_1+2a_2+\cdots+na_n=n.$

現在設 G_0 及 s_r 由(12)式定义, p_k 由(13)式定义,則

$$(18) \quad [G_0(t)]^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty} h_n(x_1, \cdots, x_l)t^n$$

其中

$$(19) \quad h_n(x_1, \cdots, x_l)=B_n(p_1, p_2, \cdots, p_n)$$

$$(20) \quad s_r(x_1, \cdots, x_l)=(-1)^r B_r(-p_1, -p_2, \cdots, -p_r).$$

如 $r>l$, 則(20)式的左边恆等于零,于是其右边就給出了 $x_1, \cdots, x_l$ 的冪的和之間的一个代数关系. 这些公式可从下列二式得到証明,即

$$(21) \quad \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{p_k}{k}t^k\right)=\exp\left(-\log G_0\right)=\frac{1}{G_0(t)}$$

$$(22) \quad \exp\left(-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{p_k}{k}t^k\right)=G_0(t)$$

函数 B_n 应用在羣特征理論中. 关于 B_n 的其他顯表达式可參看 Littlewood (1940). Bell (1934) 曾詳細研究过 B_n, 但其定义稍有不同.

关于多变量母函数,还可參看 11-5, 11-6 及 11-8 各節,其中有球面及超球面調和多項式的母函数,見 Appell & Kampé de Fériet (1926).

19-12. 与正交多項式有关的若干母函数

在本節中,將举出二系母函数,它們是从正交多項式理論的角度上構造出來的.

設 $g_n(x)$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$ 为多項式的一个序列, 使得 $g_n(x)$ 是 n 次多項式,并設 $\alpha(x)$ 为一个具有有界变分的函数, 使得 Stieltjes 積分

$$(1) \quad \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x)g_m(x)d\alpha(x)=\lambda_{n,m}$$

对 $m, n=0, 1, 2, \cdots$ 存在．如果在 $n \neq m$ 时，有 $\lambda_{m,n}=0$，则 $g_n(x)$ 組成一正交系；如 $n=0, 1, 2, \cdots$ 时又有 $\lambda_{n,n}=1$，則称这一系为規格化正交系(見第 10 章)．如 $d\alpha/dx=w(x)$ 存在，則称之为連帶于 g_n 的权函数．如 w 在区間 $a \leqslant x \leqslant b$ 之外等于零，則在(1)中可得一由 a 至 b 的積分，幷称 g_n 为 (a, b) 上的正交系或規格化正交系．Watson (1933, 1934) 會求得了双綫性母函数

$$(2)\qquad \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x) g_n(y) t^n$$

的顯表达式，此处 g_n 为第 10 章中由勒让特，盖根堡，雅可比，拉甘尔及漢米特多項式導出的規格化正交系．应用第 10 章的記法，Watson 的結果可归納如下：

$$(3)\qquad \sum_{n=0}^{\infty} (n+\tfrac{1}{2}) P_n(x) P_n(y) t^n$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_1^{\pi} \frac{(1-t^2)\,dw}{\{1-2t[xy+(1-x^2)^{\frac{1}{2}}(1-y^2)^{\frac{1}{2}}\cos w]+t^2\}^{\frac{3}{2}}}.$$

关于

$$(4)\qquad \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) P_n(y) t^n$$

的顯表达式可参看 Watson (1933).

$$(5)\qquad 2^{2\nu-1}[\Gamma(\nu)]^2(1-x^2)^{\frac{1}{2}\nu}(1-y^2)^{\frac{1}{2}\nu}$$
$$\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+\nu)n!}{\Gamma(n+2\nu)} C_n^{(\nu)}(x) C_n^{(\nu)}(y) t^n$$
$$=\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}\nu}(1-y^2)^{\frac{1}{2}\nu}}{\pi}$$
$$\times \int_0^{\pi} \frac{\nu(1-t^2)(\sin w)^{2\nu-1}\,dw}{\{1-2t[xy+(1-x^2)^{\frac{1}{2}}(1-y^2)^{\frac{1}{2}}\cos w]+t^2\}^{\nu+1}}.$$

設

$$(6)\qquad \theta_n=(2n+\alpha+\beta+1)\frac{n!\,\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}2^{-\alpha-\beta-1},$$

即

(7) $\theta_n^{-1}=\int_{-1}^{1}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}[P_n^{(\alpha,\beta)}(x)]^2\,dx,$

命

(8) $u=\frac{1}{2}(1-x)^{1/2}(1-y)^{1/2},\quad v=\frac{1}{2}(1+x)^{1/2}(1+y)^{1/2}$

(9) $k=\frac{1}{2}(t^{1/2}+t^{-1/2})$

(10) $y=\{[(k\sec w)^2-u^2-v^2]^2-4u^2v^2\}^{1/2}$

(11) $z_1=(k\sec w)^2+u^2-v^2+y$

(12) $z_2=(k\sec w)^2-u^2+v^2+y.$

則

(13)
$$[(1-x)(1-y)]^{\frac{1}{2}\alpha}[(1+x)(1+y)]^{\frac{1}{2}\beta}\times\sum_{n=0}^{\infty}\theta_n P_n^{(\alpha,\beta)}(x)P_n^{(\alpha,\beta)}(y)t^n$$
$$=t^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}\beta}\frac{d}{dt}\left\{u^{\alpha}v^{\beta}k\times\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\left(\frac{2k\sec w}{z_1}\right)^{\alpha}\left(\frac{2k\sec w}{z_2}\right)^{\beta}\frac{\cos[(\alpha-\beta)w]\,dw}{y\cos^2 w}\right\}$$

(14)
$$\pi^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}y^2}\sum_{n=0}^{\infty}2^{-n}H_n(x)H_n(y)t^n/n!$$
$$=\pi^{-\frac{1}{2}}(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}\exp\left[\frac{4xyt-(x^2+y^2)(1+t^2)}{2(1-t^2)}\right].$$

这一公式早曾由 Mehler (1866) 導出;并見 Erdélyi (1938).

(15)
$$(xy)^{\frac{1}{2}\alpha}\exp\left(\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{2}y\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)}L_n^{\alpha}(x)L_n^{\alpha}(y)t^n$$
$$=t^{-\frac{1}{2}\alpha}(1-t)^{-1}\exp\left[-\tfrac{1}{2}(x+y)\frac{1+t}{1-t}\right]I_{\alpha}\left[\frac{2(xy)^{\frac{1}{2}}}{1-t}\right]$$

此处 I_α 为第 7 章的修正貝塞尔函数. 这是 Hille-Hardy 公式,并見 Myller-Lebedeff (1907).

Meixner (1934) 确定了所有的正交多項式 $g_n(x)$,其母函数形如:

(16) $f(t)\exp[xu(t)]=\sum_{n=0}^{\infty}g_n(x)t^n/n!$

他証明只有五种可能情形：

(i) 可用漢米特多項式表达的多項式：

$$(17)\quad f(t)=\exp\left(-\tfrac{1}{2}kt^2\right),\ u(t)=t,\ \frac{d\alpha}{dx}=\exp\left(\frac{-x^2}{2k}\right).$$

(ii) 可用廣义拉甘尔多項式表达的多項式：

$$(18)\quad f(t)=(1-\lambda t)^{-k/\lambda^2}\exp\left[\frac{kt}{\lambda(\lambda t-1)}\right],\ u(t)=\frac{t}{1-\lambda t}$$

$$(19)\quad \frac{d\alpha}{dx}=0 \qquad x>k/\lambda$$

$$(20)\quad \frac{d\alpha}{dx}=(-x+k/\lambda)^{1+k/\lambda^2}e^{x/a} \qquad -\infty<x<k/\lambda.$$

(iii) 可用 Poisson-Charlier 多項式表达的多項式：

$$(21)\quad f(t)=(1-\lambda t)^{k/\lambda^2}e^{kt/\lambda}$$

$$(22)\quad u(t)=-\lambda^{-1}\log(1-\lambda t).$$

此处 $\alpha(x)$ 为常数，除非

$$(23)\quad x=x_n=\lambda^{-1}k-\lambda n \qquad n=0,1,2,\cdots$$

此时 $\alpha(x)$ 具有一跳躍，定义为

$$(24)\quad \alpha(x_n+0)-\alpha(x_n-0)=\frac{1}{n!}\left(\frac{k}{\lambda^2}\right)^n.$$

(iv) 超比多項式；离散变量

$$(25)\quad f(t)=\left[(1-\mu t)^{-\mu^{-1}}(1-\lambda t)^{-\lambda^{-1}}\right]^{k/(\mu-\lambda)}$$

$$u(t)=(\lambda-\mu)^{-1}[\log(1-\mu t)-\log(1-\lambda t)]$$

此处 λ,μ 都是实数，$\alpha(x)$ 为常数，除非

$$(26)\quad x=x_n=k/\lambda-(\lambda-\mu)n \qquad n=0,1,2,\cdots$$

此时 $\alpha(x)$ 具有一跳躍，使得

$$(27)\quad \alpha(x_n+0)-\alpha(x_n-0)=\left(-\frac{\mu}{\lambda}\right)^n\binom{-k/(\lambda\mu)}{n}.$$

(v) 超比多項式；連續变量；仍有方程 (25)，此时 λ,μ 为共轭复数，且

(28) $\operatorname{Im}\lambda > \operatorname{Im}\mu$.

于是，对于 $-\infty < x < \infty$

(29) $$\frac{d\alpha}{dx} = \left(-\frac{\mu}{\lambda}\right)^{x/(\mu-\lambda)} \Gamma(\omega)\Gamma(\phi),$$

其中

(30) $$\omega = \frac{x}{\mu-\lambda} + \frac{k}{\mu(\lambda-\mu)}, \quad \phi = \frac{x}{\lambda-\mu} + \frac{k}{\lambda(\mu-\lambda)}$$

且

(31) $$\left|\arg\left(-\frac{\mu}{\lambda}\right)\right| < \pi.$$

在上述的各种情形下，都可以建立出 $g_n(x)$ 的微分方程或差分方程.

关于生成函数包含正交函数的其他情形可参看 19–11 節末.

19–13. 某些連續正交系的母函数

漢米特、拉甘尔、勒上特、蓋根堡及雅可比多項式出現在 Sturm-Liouville 型的某些綫性微分方程的研究中. 經乘以一权函数后，由此而得的正交函数都是 Sturm-Liouville 問題的特征函数，一般都具有一离散分譜. 关于这种系統的綫性及双綫性母函数見 19–12 節.

对于变量的另一范圍，同一微分方程可以有一連續分譜. 設 $f_\nu(x)$ 为对应的特征函数系. 則过 ν 值的一个適当范圍的積分.

$$\int t^\nu f_\nu(x)\, d\nu, \quad \int t^\nu f_\nu(x) f_\nu(y)\, d\nu$$

就可称为是 $f_\nu(x)$ 的綫性及双綫性母函数；这与拉普拉斯原來的母函数定义(見 19–1 節)一致.

在本節中，綫性及双綫性母函数是就第 8 章的抛物柱函数 D_ν，第 6 章的合流超比函数 $M_{\kappa,\mu}$ 及 $W_{\kappa,\mu}$，蓋根堡多項式 C_μ^ν 及对应于雅可比多項式的超比函数(見第 2, 10 章)來提出的.

关于公式的証明以及在边值問題連續正交系上的应用可参看 Erdélyi (1941).

(1) $$\exp\left(-\tfrac{1}{4}x^2-xt-\tfrac{1}{2}t^2\right)=(2\pi i)^{-1}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}t^{\nu}\Gamma(-\nu)D_{\nu}(x)\,d\nu$$

$$c<0,\quad |\arg t|<\tfrac{1}{4}\pi$$

(2) $$(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}\exp\left[\frac{1}{4}\,\frac{1-t^2}{1+t^2}(x^2+y^2)+\frac{ixyt}{1+t^2}\right]$$

$$=\frac{(\tfrac{1}{2}\pi)^{\frac{1}{2}}}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{t^{-\nu-1}}{\sin(-\nu\pi)}$$

$$\times[D_{\nu}(x)D_{-\nu-1}(iy)+D_{\nu}(-x)D_{-\nu-1}(iy)]\,d\nu$$

$$-1<c<0,\quad |\arg t|<\tfrac{1}{2}\pi$$

(3) $$\Gamma(2\mu+1)(1+t)^{-2\mu-1}x^{\mu+\frac{1}{2}}\exp\left(\tfrac{1}{2}x\frac{t-1}{t+1}\right)$$

$$=(2\pi i)^{-1}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}t^{-\frac{1}{2}+\kappa-\mu}\Gamma(\tfrac{1}{2}+\kappa+\mu)\Gamma(\tfrac{1}{2}-\kappa+\mu)M_{\kappa,\mu}(x)\,d\kappa$$

$$|c|<\tfrac{1}{2}+\operatorname{Re}\mu,\quad |\arg t|<\pi$$

(4) $$\frac{(txy)^{\frac{1}{2}}}{1+t}\exp\left(-\frac{x+y}{2}\,\frac{1-t}{1+t}\right)J_{2\mu}\left[\frac{2(txy)^{\frac{1}{2}}}{1+t}\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{L}t^{\kappa}\,\frac{\Gamma(\tfrac{1}{2}-\kappa+\mu)\Gamma(\tfrac{1}{2}+\kappa+\mu)}{[\Gamma(2\mu+1)]^2}M_{\kappa,\mu}(x)\,M_{\kappa,\mu}(y)\,d\kappa$$

$$|\arg t|<\pi.$$

此处 $J_{2\mu}$ 表 2μ 階第一类貝塞尔函数 (見第 7 章), L 为 $-i\infty$ 至 $i\infty$ 的積分路徑,將 $\Gamma(\tfrac{1}{2}-\kappa+\mu)$ 的極与 $\Gamma(\tfrac{1}{2}+\kappa+\mu)$ 的極分隔开來.

如以第一类亨克尔函数 $H_{2\mu}^{(1)}$ 代 $J_{2\mu}$, 則(4)式变为:

(5) $$\frac{(txy)^{\frac{1}{2}}}{1+t}\exp\left(-\frac{x+y}{2}\,\frac{1-t}{1+t}\right)H_{2\mu}^{(1)}\left[\frac{2(txy)^{\frac{1}{2}}}{1+t}\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{L}t^{\kappa}e^{i\pi(\kappa-\mu)}[U(\kappa)W_{\kappa,\mu}(x)W_{\kappa,\mu}(y)$$

$$+U(-\kappa)W_{-\kappa,\mu}(-x)W_{-\kappa,\mu}(-y)]\,d\kappa$$

其中

$$U(\kappa)=\Gamma(\tfrac{1}{2}-\kappa-\mu)\Gamma(\tfrac{1}{2}-\kappa+\mu).$$

盖根堡函数 C_μ^ν 可定义为

$$(6)\qquad C_\mu^\nu(x)=\frac{\Gamma(\mu+2\nu)}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(2\nu)}F(\mu+2\nu,\ -\mu;\nu+\tfrac{1}{2};\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}x)$$

式中 F 为第 2-1 節的超比級数. 如 $\mu=0, 1, 2, \cdots$, 則 C_μ^ν 卽为 11-1-2 節中的盖根堡或畸种球多項式. 綫性母函数为

$$(7)\qquad (1+2tx+x^2)^{-\nu}=-\frac{1}{2i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}t^\mu\frac{C_\mu^\nu(x)}{\sin(\mu\pi)}d\mu,$$

$$-2\operatorname{Re}\nu<c<0.$$

用留数來計算出 (7) 中的積分, 卽可得 11-1(16).

非整数下标 μ 的盖根堡函数在数学物理中最常見的是 $\mu=-\tfrac{1}{2}+i\sigma$ (σ 实数) 的情形; 此时, $C_{\mu+l}^{\frac{1}{2}-l}$ 將出現在連帶錐面調和函数的定义中. Weyl (1910) 曾举其标准化形式如下:

$$(8)\qquad \psi_\mu^{\pm l}(x,\phi)$$

$$=N^{\frac{1}{2}}\frac{(x^2-1)^{\frac{1}{2}l}}{2^l l!}F(l-\mu,l+\mu+1;l+1;\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}x)e^{\pm il\phi}$$

$$l=0, 1, 2, \cdots$$

其中

$$(9)\qquad N=(-1)^l(\mu+\tfrac{1}{2})\operatorname{ctn}(-\mu\pi)\frac{\Gamma(1+\mu+l)}{\Gamma(1+\mu-l)}.$$

命

$$(10)\qquad \omega=xy-(x^2-1)^{\frac{1}{2}}(y^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos(\phi-\theta).$$

則

$$(11)\qquad (t^2-1)(1+2t\omega+t^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$=i\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{t^\mu}{\cos(\mu\pi)}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\psi_\mu^l(x,\phi)\psi_\mu^{-l}(y,\theta)\,d\mu,$$

$$-1<c<0.$$

关于雅可比多项式推廣方面的結果如下：

命

(12) $S=[1+2(1-2x)ut^{1/2}+u^2t]^{1/2}$

(13) $T=[1+2(1-2y)ut^{-1/2}+u^2t^{-1}]^{1/2}$

(14) $V=[1+2(1-2x)t+t^2]^{1/2}$.

則

(15) $$\frac{\Gamma(\gamma)}{V}\left(\frac{V-t-1}{-2tx}\right)^{\gamma-1}\left(\frac{V-t+1}{2}\right)^{\gamma-\alpha}$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\Gamma(-\nu)\Gamma(\gamma+\nu)t^{\nu}F(-\nu,\alpha+\nu;\gamma;x)\,d\nu$$
$$0<-c<\operatorname{Re}\gamma.$$

(16) $$t^{-\frac{1}{2}\alpha}\int_0^{\infty}u^{\alpha-1}\left(\frac{S-ut^{1/2}-1}{-2ux}\;\frac{T-ut^{-1/2}-1}{-2uy}\right)^{\gamma-1}$$
$$\times\left(\frac{S-ut^{1/2}+1}{2}\;\frac{T-ut^{-1/2}+1}{2}\right)^{\gamma-\alpha}\frac{du}{ST}$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\Phi(\nu)t^{\nu}F(-\nu,\alpha+\nu;\gamma;x)F(-\nu,\alpha+\nu;\gamma;y)\,d\nu$$
$$0<-c<\operatorname{Re}\alpha,\ \operatorname{Re}(\alpha-\gamma)<-c<\operatorname{Re}\gamma,$$

式中

(17) $\Phi(\nu)=\Gamma(-\nu)\Gamma(\alpha+\nu)\Gamma(\gamma+\nu)\Gamma(\gamma-\alpha-\nu)$.

如果 (7) 中的參数 ν, 或 (15), (16) 中的參数 α, γ 并不滿足各有关的不等式，則積分路徑必須加以刻鑿，借以分隔被積函数的極的各不同組合．这些曲折的路徑应使之变形为由 $c-i\infty$ 至 $c+i\infty$ 的直綫，这样变形之后，有許多極將被通过，因此將產生留数之和．此时的母函数卽为一和加上一積分，表示一“混合”分譜的特征函数。

参 考 文 献

Appell, Paul, 1880: *Arch. Math. Phys.* 65, 171–175.

Appell, Paul, 1897: *Nouv. Ann. Math.* (3) 16, 265–268.

Appell, Paul, 1929: *Acta Math.* 52, 317–325.

Appell, Paul and Joseph Kampé de Fériet, 1926: *Fonctions Hypergéo-métriques et hypersphériques; Polynomes d'Hermite*, Gauthier-Villars, Paris.

Barnes, E. W., 1906: *Cambridge Philos. Soc. Trans.* 20, 215–232.

Bateman, Harry, 1905: *Proc. London Math. Soc.* (2) 3, 111–123.

Bateman, Harry, 1934: *Ann. of Math.* 35, 767–775.

Bateman, Harry, 1940: *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* 26, 491–496.

Bell, E. T., 1934: *Ann. of Math.* (2) 35, 258–277.

Berger, A. H., 1888: *Stockh. Vetensk. Bihang.* 13, 43.

Bird, M. T., 1934: *Dissertation*, Illinois.

Brafman, Fred, 1951: *Proc. Amer. Math. Soc.* 2, 942–949.

Brenke, W. C., 1945: *Amer. Math. Monthly* 52, 297–301.

Burchnall, J. L., 1951: *Canadian J. Math.* 3, 62–68.

Chaundy, T. W., 1943: *Quart. J. Math., Oxford Ser.* 14, 55–78.

Courant, R. and D. Hilbert, 1937: *Methoden der mathematischen Physik*, 2. Springer Berlin.

Darboux, J. G., 1878: *J. Math. Pures Appl.* (3) 4, 5–56, and 377–416.

Devisme, Jacques, 1932: *C. R. Acad. Sci. Paris*, 195, 437–439.

Devisme, Jacques, 1933: *Toulousé, Faculté des Sciences, Annales* (3), 25, 143–238.

Devisme, Jacques, 1936: *Congres International des Mathématiciens*, Oslo, 2, 92–93.

Doetsch, Gustav, 1937: *Theorie und Anwendung der Laplace Transformation* (p. 6 ff), Springer, Berlin.

Erdélyi, Arthur, 1938: *Math. Z.*, 44, 201–211.

Erdélyi, Arthur, 1941: *Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Sect. A.*, 61, 61–70.

Fasenmyer, Mary Celine, 1947: *Bull. Amer. Math. Soc.* 53, 806–812.

Ford, W. B., 1936: *The asymptotic developments of functions defined by Maclaurin series.* University of Michigan Studies, Ann Arbor.

Fort, Tomlinson, 1948: *Finite differences and difference equations in the real domain*, Oxford.

Friedman, Bernard, 1952: *Unpublished.*

Frink, Orrin: see Krall, H. L.

Gegenbauer, Leopold, 1874: *Akad. Wiss. Wien. S-B* 11 *a*, 70, 433-443.

Glaisher, J., 1873: Consult G. N. Watson, *A treatise on the theory of Bessel functions*, Cambridge, 1922 (p. 140).

Gordon, W. O., 1929: *Ann. Physik* (5) 2, 1031-1056.

Green, George, 1934: *Philos. Mag.* (7) 18, p. 631.

Gronwall, T. H., 1914: *Math. Ann.* 75, 321-375.

Hall, N. A. 1936: *Bull. Amer. Math. Soc.* 42 695-698.

Halphén, G. 1881: *C. R. Acad. Sci. Paris*, 93, 781-783, 833 835.

Halphén, G., 1881: *Bull. Sci. Math.* (2) 5, 462-488.

Hermite, Charles, 1878: *J. Reine Angew. Math.* 84, 64-69.

Hilb, Emil, 1922: *Math. Ann.* 85, 89-98.

Huff, W. N., 1947: *Duke Math. J.* 14, 1091-1104.

Huff, W. N. and E. D. Rainville, 1952: *Proc. Amer. Math. Soc.* 3, 296-299.

Humbert, Pierre, 1920: *Proc. Edinburgh Math. Soc.* 39, 21-24.

Humbert, Pierre, 1923: *C. R. Acad. Sci. Paris*, 176, 1282-1284.

Humbert, Pierre, 1924: *J. École Polytech.* 24, 59-75.

Humbert, Pierre, 1930: *C. R. Acad. Sci. Paris*, 190, 159.

Imschenetzky, B. 1844: *Petersb. Mém.* (7) 31, No. 11.

Jordan, Charles, 1929: *Acta Szeged* 4, 130 150.

Kampé de Fériet, Joseph, 1926: see Appell, Paul.

Koschmieder, Lothar, 1924: *Math. Ann.* 91, 62-79.

Koschmieder, Lothar, 1937: *Math. Z.* 43, 248-254.

Koschmieder, Lothar, 1938: *Math. Z.* 43, 783-792.

Koshliakov, N. S., 1935: *Rec. Math.* 42, 425-434.

Krall, H. L. and Orrin Frink, 1949: *Trans. Amer. Math. Soc.* 65, 100-115.

Lagrange, J. L., 1868: *Oeuvres*, 2, 173-234, Paris.

Lagrange, René, 1928: *Acta Math.* 51, 201-309.

Laplace, P. S. de, 1812: *Théorie analytique des probabilités*, Paris. Reprinted in *Oeuvres Complétes*, 7, Paris, 1886.

Léauté, H., 1881: *J. Math.* (3) 7, 185-200.

Lerch, M., 1905: *J. Reine Angew. Math.* 128, 211-221.

Littlewood, D. E., 1940: *The theory of group characters and matrix representations of groups*, (in particular p. 82) Oxford.

Mahler, Kurt, 1930: *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 54, 1-41.

Mehler, F. G., 1866: *J. Reine Angew Math.* 66, 161-176.

Meixner, Joseph, 1934: *J. London Math. Soc.* 9, 6–13.

Mittag-Leffler, G. M., 1891: *Acta Math.* 15, 1–32.

Mittag-Leffler, G. M., 1901: *Acta Math.* 24, 183–204, 205–244.

Mott, N. F., 1932: *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A*, 135, 429–458. (particularly p. 442).

Myller-Lebedeff, Wera, 1907: *Math. Ann.* 64, 388–416.

Narumi, Seimatsu, 1929: *Tohoku Math. J.* 30, 185–201.

Nielsen, Niels, 1906: *Handbuch der Theorie der Gamma Function*, (in particular Chapter 5, §§ 26–28), B. G. Teubner, Leipzig.

Nielsen, Niels, 1912: *Ann. Math.* (3) 19, 179–204.

Nielsen, Niels, 1914: *Monatsh. Math. Phys.* 25, 328–336.

Nörlund, N. E., 1920: *Acta Math.* 43, 121–196.

Nörlund, N. E., 1924: *Vorlesungen über Differenzenrechnung*, Springer, Berlin.

Obrechkoff, Nikola, 1934: *Bull. Soc. Math. France*, 62, 84–109.

Oettinger, L., 1867: *J. Reine Angew. Math.* 67, 327–359.

Pidduck, F. B., 1910: *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A.*, 83, 347–356.

Pidduck, F. B., 1912: *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A.*, 86, 396–405.

Pincherle, Salvadore, 1889: *Bologna Mém.* (5) 1, 337–364.

Prasad, Ganesh, 1926: *Proc. Benares Math. Soc.*, 7–8, 47–53.

Rainville, E. D., 1945: *Bull. Amer. Math. Soc.*, 51, 268–271.

Rainville, E. D., 1946: *Amer. Math. Monthly*, 53, 299–305.

Rainville, E. D., 1947: *Unpublished results.*

Rainville, E. D., 1952: see also Huff, 1952.

Rice, S. O., 1940: *Duke Math. J.* 6, 108–119.

Rogowski, W., 1932: *Arch. Elektrotechnik* 32, 643–678.

Sheffer, I. M., 1939: *Duke Math. J.* 5, 590–622.

Sheffer, I. M., 1945: *Bull. Amer. Math. Soc.* 51, 739–744.

Sylvester, J. J., 1879: *C. R. Acad. Sci. Paris*, 89, 24–26; *Collected Mathematical papers* (3), 253–255.

Szegö, Gábor, 1939: *Orthogonal polynomials*, Amer. Math. Soc. Colloquium publications (23), New York.

Tchebycheff, P., 1889: *Acta Math.* 12, 287–322.

Thorne, C. J., 1945: *Amer. Math. Monthly* 52, 191–193.

Toscano, Letterio, 1950: *Rivista Mat. Univ. Parma* 1, 459–470.

Tricomi, F. G., 1949: *Ann. Mat. Pura Appl.* (4) 28, 263–289.

Truesdell, C. A., 1948: *An essay toward a unified theory of special functions*, Princeton University Press, Princeton, N. J.

Van Veen, S. C., 1931: *Math. Ann.* 105, 408–436.

Varma, R. S., 1951: *Proc. Amer. Math. Soc.* 2, 593–596.

Watson, G. N., 1933: *J. London Math. Soc.* 8, 189–192, 194–199, 289–292.

Watson, G. N., 1934: *J. London Math. Soc.* 9, 22–28.

Weyl, H., 1910: *Nachr. d. Göttinger Ges. Wiss.*, 442–467.

Whittaker, J. M., 1933: *Proc. London Math. Soc.* (2) 36, 451–469.

Whittaker, E. T. and G. N. Watson, 1935: *A course of modern analysis*, Cambridge.

Widder, D. V., 1936: *Trans. Amer. Math. Soc.* 39, 244–298.

Williams, K. P., 1924: *Trans. Amer. Math. Soc.*, 26, 441–445.

Wright, E. M., 1932: *J. London Math. Soc.* 7, 256–262.

Wright, E. M., 1933: *J. London Math. Soc.* 8, 71–79.

Wright, E. M., 1948: *Trans. Amer. Math. Soc.* 64, 409–438.

Wright, E. M., 1949: *J. London Math. Soc.* 24, 304–309.

索　引

(数字代表章節)

一　划

二　划

三　划

四　划

五　划

六　　划

七 划

八 划

九 划

十 划

十一划

十二划

十三划

十 四 划

十 五 划

十 六 划

十 八 划

記 法 表

（数字代表章節）

A

$a_n(\theta)$ 馬蒂安方程中 h 的特征值 16-4

$a_n^m(k^2)$ 拉美方程中 h 的特征值 15-5-1

$a_n'^m(k^2)$ 拉美方程中 h' 的特征值 15-5-2

$A_n(x)$ 阿贝尔多項式 19-7

B

$b_n(\theta)$ 馬蒂安方程中 h 的特征值 16-4

$b_n^m(k^2)$ 拉美方程中 h 的特征值 15-5-1

$b_n'^m(k^2)$ 拉美方程中 h' 的特征值 15-5-2

B_n 柏努利数 19-4

$B_n(x)$ 柏努利多項式 19-2

$B_n^{(l)}(x)$, $B_n^{(l)}(x|\omega)$ 廣义柏努利多項式 19-7

C

$c_n(m)$ 雷門尼强和 17-6

$c_n^m(k^2)$ 拉美方程中 h 的特征值 15-6

$C_n^\nu(x)$ 蓋根堡多項式 19-6

$C_\mu^\nu(z)$ 蓋根堡函数（見第1册 3-15-2）

$c=\mathrm{cn}\,z$ 15-4

$\mathrm{ce}_n(z,\theta)$ 馬蒂安函数 16-4

$\mathrm{cn}\,u$ 雅可比椭圓函数（見第2册 13-9）

$\mathrm{Ce}_n(z,\theta)$ 修正馬蒂安函数 16-6

D

$d(n)$, $d_k(n)$ 17-1-1

$D_\nu(x)$ 抛物柱函数（見第2册 8-2）

$d=\mathrm{dn}\,z$ 15-4

$\mathrm{dn}\,u$ 雅可比椭圓函数（見第2册 13-9）

E

$E(n)$ 分拆函数 17-2-1

E_n 欧拉数 19-7

$E_n(x)$ 欧拉多項式 19-7

$E_n^{(l)}(x)$, $E_n^{(l)}(x|\omega)$ 廣义欧拉多項式 19-7

$E_\alpha(z)$ Mittag-Leffler 函数 18-1

$E_{\alpha,\beta}(z)$ 廣义 Mittag-Leffler 函数 18-1

$Ec_n^m(z,k^2)$, $Es_n^m(z,k^2)$ 实周期拉美函数 15-5-1

$Ec_n'^m(z,k^2)$, $Es_n'^m(z,k^2)$ 虚周期拉美函数 15-5-2

F

$F_n^m(z,k^2)$ Lamé-Wangerin 函数 15-6

$Fey_n(z,\theta)$, $Fek_n(z,\theta)$ 修正馬蒂安函数 16-6

G

g_2, g_3 韋尔司特拉斯椭圓函数的不变式 14-6-2

$G_{m,n}(x,y)$ 二变量漢米特多項式（見第2册 12-8）

$Gey_n(z,\theta)$, $Gek_n(z,\theta)$ 修正馬蒂安函数 16-6

H

$h_l(x,n)$ n 階双曲綫函数 18-2

$H_n(x)$ 漢米特多項式(見第2册 10-13)

$H_{m,n}(x,y)$ 二变量漢米特多項式(見第2册 12-8)

$Hc_n^m(\alpha,\beta,\gamma)$, $Hs_n^m(\alpha,\beta,\gamma)$ 椭球調和函数 15-7

J

$J(z)$ 絕对不变式 14-6-2

$J_k(n)$ Jordan 函数 17-1-1

$J_\nu(x)$ 第一类貝塞尔函数(見第2册 7-2-1)

K

k 雅可比椭圓函数的模 15-1-1

$k_l(x,n)$ n 階三角函数 18-2

$k_n(x)$ 17-1-3

$K_\nu(x)$ 第三类修正貝塞尔函数(見第2册 7-2-2)

L

$L(s,\chi)$ L-級数 17-8

$L_n(x)$ 拉甘尔多項式 19-4

$L_n^\alpha(x)$ 拉甘尔多項式 19-7

M

M 模羣 14-6-1

$M_{k,\mu}(z)$ 合流超比函数(見第1册 6-9)

$Me_n^{(j)}(z,\theta)$ 修正馬蒂安函数 16-6

N

$Ne_n^{(j)}(z,\theta)$ 修正馬蒂安函数 16-6

P

$p(n)$ 分拆数 17-2-1

$p_l(n)$, $p_{l,N}(n)$ 分拆数(有限的) 17-2-1

$p_n(x)$ 泊松-查理多項式 19-7

$P_n(x)$ 勒让特多項式(見第2册 10-10)

$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ 雅可比多項式 19-7

$P_\nu^\mu(z)$ 勒让特函数(見第1册 3-2)

$Ps_\nu^\mu(z,\theta)$ $Ps_\nu^\mu(x,\theta)$ 球体波函数 16-9

Q

$Q(n)$ 17-1-8

$Qs_\nu^\mu(z,\theta)$, $Qs_\nu^\mu(x,\theta)$ 球体波函数 16-9

R

$r_k(n)$ 17-3

S

$S_\nu^\mu(\theta)$ 16-9

$S(m,n)$ 高斯和 17-6

$S(u,v,x)$ Kloosterman 和 17-6

$S_\nu^{\mu(j)}(z,\theta)$ 球体波函数 16-9

$s=\mathrm{sn}\,z$ 15-4

$\mathrm{se}_n(z,\theta)$ 馬蒂安函数 16-4

$\mathrm{sn}\,u$ 雅可比椭圓函数(見第2册 13-9)

$Sc_n^m(\beta,\gamma)$, $Ss_n^m(\beta,\gamma)$ 椭球面調和函数 15-7

$Se_n(z,\theta)$ 修正馬蒂安函数 16-6

T

$T_n(x)$ 車比雪夫多項式 19-2

U

$U(n)$ 分拆函数 17-2-1

$U_n(x)$ 車比雪夫多項式 19-6

W

$W_{k,\mu}(z)$ 合流超比函数(見第1册 6-9)

Z

$Z\left(\frac{g}{h}\right)(s)_s$ Epstein ζ-函数 17-9

希腊字母

γ 欧拉常数(見第1册1-1)
Δ 韋尔司特拉斯范式的判别式 14-6-2
Δ 拉普拉斯算符 15-1-1
$\varepsilon_0=1$, $\varepsilon_n=2$, $n=1,2,\cdots$
$\zeta(s)$ 17-7
θ_1', $\cdots$, θ_4 自变数为零的 θ-函数 14-6-2
$\lambda(n)$ 刘維尔函数 17-1-1
$\lambda(z)$ 模函数 14-6-3
$\lambda_\nu^\mu(\theta)$ 球体波函数的特征值 16-9
$\Lambda(n)$ 17-1-1
$\Lambda(z)$ M_3 的自守函数 14-6-3
$\mu(n)$ 馬別司函数 17-1-1
$\mu(x,\beta)$, $\mu(x,\beta,\alpha)$ 18-3
$\nu(n)$ 17-1-1
$\nu(x)$,ν (x,α) 18-3
$\pi(x)$ 質数的数目 17-7
$\sigma(n)$, $\sigma_k(n)$ 17-1-1
$\tau(n)$ 雷門尼强函数 17-4
$\tau_k(n)$ 17-1-1
$\phi(n)$ 欧拉函数 17-1-1
$\phi(\alpha,\beta;z)$ E. M. 拉斐特廣义貝塞尔函数 18-1
$\phi_k(n)$ 17-1-1
$\Phi_q(s)$ q 次 Jacobsthal 和 17-5
$\Psi_\nu^{(j)}(\zeta)$ 球面貝塞尔函数 16-9
$\xi(s)$ 17-7
$\chi(m)$, $\chi_1(m)$ 特征 17-8

其他記法

$\arg z$ 复变数 z 的幅角(或相角)
$\operatorname{Im} z$ 复变数 z 的虛部
$\operatorname{Re} z$ 复变数 z 的实部
$a\equiv b(\operatorname{mod} n)$ 17-2-1
$(a)_n=\Gamma(a+n)/\Gamma(a)$
$\left(\frac{k}{p}\right)$ 勒让特-雅可比符号 17-5
$m|n$, $m\nmid n$ 17-1-1
(m,n) 17-1-1
$\binom{x}{n}=\frac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n!}$ 二項式系数 19-7
$[x]$ $\leqslant x$ 的最大整数
$\sum_p$, $\sum_{d|n}$, $\sum_{(m,n)=1}$ 17-1-1
$\prod_p$, $\prod_{d|n}$ 17-1-1
$\sim$ 近似相等或漸近相等
$⨍$ 積分的柯西主值
$\int_\infty^{(0+)}$ 廻綫積分

人名对照表(1)

A

Abel 阿贝耳
Agarwal 阿加華耳
Apostol 阿普司托尔
Appell 阿貝尔
Artin 阿丁

B

Barnes 巴尼斯
Bateman 彼得曼
Bernouili 柏努利
Bessel 貝塞尔
Bird 勃特
Bruwier 勃罗威
Burchnall 貝契納尔
Burnside 貝沙特

C

Cauchy 柯西
Césaro 賽薩洛
Charlier 查萊
Corput 柯彼脫

D

Darboux 达布克司
Dedekind 狄迪卡英特
Delerue 台罗
Dirichlet 狄里克雷

E

Eisenstein 艾生司丁
Emde 爱姆特
Epstein 爱潑司丁
Erdélyi 爱尔台里
Euler 欧拉

F

Fasenmyer 法申米艾
Feller 費勒
Ferrar 斐勒
Floquet 弗洛奎特
Ford 福特
Fourier 富里哀
Fricke 弗立克
Friedman 弗列特門
Frink 弗林克
Fuchs 富契司

G

Gauss 高斯
Gegenbauer 蓋根堡

H

Halphin 海耳文
Hankel 亨克尔
Hardy 哈台
Hecke 希司克
Herglotz 漢洛洛茨
Hermite 厄米特
Heun 龍
Hilb 希尔勃
Hilbert 希耳伯
Hill 希尔
Hille 希耳
Huff 賀夫
Humbert 漢貝特

I

Imschenetzky 印司切納兹开
Ince 印斯
Ingham 印亨

J

Jacobi 雅可比
Jacobsthal 雅可白塞耳
Jahnke 楊基
Jarnike 爵涅克
Jordan 約当

K

Klein 凱林
Kloosterman 克罗司脫門
Krall 克賴耳

L

Lagrange 拉格郎日
Lamé 拉美
Laguerre 拉甘尔
Landau 侖陶
Landen 侖頓
Langer 倫乔
Laplace 拉普拉斯
Laurent 劳倫特
Legendre 勒上特
Lehmer 李卑
Lehrer 李雷
Liouville 刘維尔
Littlewood 列德尔伍特

M

Mahler 馬勒
Mathieu 馬蒂安
McLachlan 麥克拉倫
Mehler 米勒
Meissel 梅塞尔
Meixner 米克斯奈
Mikusinski 繳柯辛斯基
Mills 密耳司
Minkowski 敏可夫斯基
Mittag-Leffler米塔格-李弗勒
Moebius 馬別司
Mordell 莫特耳

N

Narumi 拿罗密

O

Opperheim 沃普海英

P

Perron 潘隆
Petersson 彼得生
Picard 畢卡第
Pincherle 品司赫耳
Poincaré 普英卡亞
Poisson 泊松
Poli 普列
Pollard 普拉特

R

Rainville 侖維尔
Ramanujan 雷門尼强
Riemann 黎曼
Riesz 李茨
Rogers 罗乔司

S

Schaffer 謝弗
Schmidt 許密德
Schwarz 許瓦兹
Selberg 塞耳鲍
Sengupta 孙格潑达
Siegel 西格耳
Smith 斯密司
Sommerfeld 松卑費尔特
Stieltjes 斯第耳吉司
Stirling 斯梯林
Strutt 斯特罗脫
Sturm 斯透姆
Sylvester 薩耳韋司特
Szegö 斯高

T

Taylor 台劳
Tchebychef 車比雪夫
Thorne 托尼
Titchmarsh 狄奇馬齐
Toscano 托司肯諾
Tricomi 特列柯米
Truesdell 特罗司台耳

V

Van Veen 万·文
Varma 瓦馬
Vinogradow 文諾格拉多夫
Volterra 伏耳脫
Voronoi 伏隆諾

W

Walfeiz 華尔費茨
Wangerin 黄格林
Waring 華林
Watson 華特生
Weber 韋勃
Weierstrass 韋尔司特拉斯
Whittaker 魏塔克耳
Widder 韋特
Wiman 魏曼
Willians 威廉
Wright 拉爱特
Wronski 隆司基

人名对照表 (2)

三 划

万·文 Van Veen

四 划

文諾格拉多夫 Vinogradow
巴尼斯 Barnes
瓦馬 Varma

五 划

台罗 Delerue
台劳 Taylor
弗立克 Fricke
弗列特門 Friedman
弗林克 Frink
弗洛奎特 Floquet

六 划

西格耳 Siegel
伏耳脱 Volterra
伏隆諾 Voronoi
列德尔伍特 Littlewood
刘維尔 Liouville
托司肯諾 Toscano
托尼 Thorne
达布克司 Darboux
印司切納茲开 Imschenetzky
印亨 Ingham
印斯 Ince
艾生司丁 Eisenstein
米克斯奈 Meixner
米勒 Mehler
米塔格-李弗勒 Mittag-Leffler
孙格潑达 Sengupta

七 划

克罗司脫門 Kloosterman
克賴耳 Krall
李本 Lehmer
李茨 Riesz
李雷 Lehrer
沃普海英 Opperheim
狄里克雷 Dirichlet
狄奇馬齐 Titchmarsh
狄迪卡英特 Dedekind
希司克 Hecke
希尔 Hill
希尔勃 Hilb
希耳 Hille
希耳伯 Hilbert
劳倫特 Laurent
貝沙特 Burnside
貝契納尔 Burchnall
貝塞尔 Bessel
車比雪夫 Tchebychef

八 划

亨克尔 Hankel
侖頓 Landen
侖維尔 Rainville
侖陶 Landau
彼得生 Petersson
彼得曼 Bateman
松本費尔特 Sommerfeld
拉甘尔 Laguerre
拉美 Lamé
拉格郎日 Lagrange
拉普拉斯 Laplace
拉邁特 Wright